

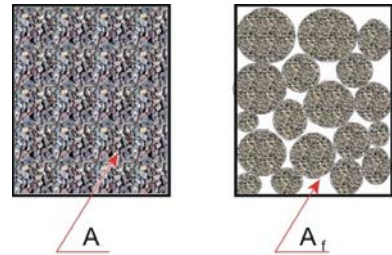
### 3 Grundwasserströmung

#### 3.1 Gesetz von Darcy

Bei der Bewegung eines strömenden Mediums wird unterschieden zwischen:

- *Massenströmung* .... alle Massenteilchen des Strömungsfeldes bewegen sich;
- *Filterströmung* ..... nur ein Teil der Massenteilchen bewegt sich, der andere bildet das umströmte Feststoffgerüst.

Die Bewegung des Grundwassers im Porenraum eines Feststoffkörpers ist somit eine Filterbewegung. Dieser Porenraum ist mit Wasser erfüllt und vorstellbar als eine Vielzahl von dünnen Kanälen mit stark veränderlichem Durchmesser.



Die Bewegung des Grundwassers in den einzelnen Porenkanälen zu beschreiben ist nicht möglich. Die Grundwasserströmung wird deshalb als gedachte (fiktive) Massenströmung mit homogen durchströmtem Querschnitt betrachtet. Es gilt:

Abb. 3.1 *Massenströmung - Filterströmung*

$v_f = Q/A$  (m/s)..... fiktive Geschwindigkeit der Massenströmung (Ersatzströmung) = Filtergeschwindigkeit nach ÖNORM B 2400 (jetzt EN ISO + Restnorm) bzw.

$Q = v_f \cdot A$  (m<sup>3</sup>/s)..... Kontinuitätsgleichung

A ..... durchströmte Fläche bei Massenströmung ("Filterfläche" = Gesamtfläche)

$A_f$  ..... tatsächlich durchströmte Fläche bei Filterströmung entsprechend dem durchströmbaren (durchflusswirksamen) Porenanteil

$n_f$ ..... durchströmbarer Porenanteil (durchflusswirksamer Hohlraumanteil)

$$A_f = n_f \cdot A$$

Die Filtergeschwindigkeit  $v_f$  wird über den ganzen betrachteten Querschnitt als konstant angenommen und ist ein reiner Rechnungswert. Dadurch ist es möglich, die Grundwasserströmung mit Hilfe der Potentialtheorie zu beschreiben.

Somit ist die durchschnittliche tatsächliche Geschwindigkeit des Wassers im Grundwasserleiter (Abstandsgeschwindigkeit  $v_a$  nach ÖNORM B 2400)

$$v_a = \frac{v_f}{n_f} = \frac{Q}{n_f \cdot A} \quad (\text{m/s}) \quad \text{Abstandsgeschwindigkeit}$$

z.B. für

$$n_f = 0,20 \text{ ist } v_a = \frac{1}{0,20} \cdot v_f = 5 \cdot v_f$$

Die Bewegungsgeschwindigkeit von Grundwasser spielt für viele Probleme eine große Rolle, besonders für den Umweltschutz. Wenn z.B. ein Schadstoff, der im Wasser gelöst ist, in den Zuströmbereich eines Entnahmebrunnens in den Grundwasserleiter gelangt, so bewegt er sich etwa mit dieser Abstandsgeschwindigkeit in Richtung zum Brunnen.

Die Bewegungsgeschwindigkeit von Grundwasser wird von den meisten viel zu hoch eingeschätzt, besonders von denen, die sich Grundwasser in unterirdischen Adern oder Flüssen mit einer Fließgeschwindigkeit, die für unsere oberirdischen Gewässer üblich ist, vorstellen. Zutreffender könnte man die Grundwassergeschwindigkeit mit der Bewegung in der Mitte eines großen Sees mit geringem Ab-

fluss vergleichen. So liegt die Bewegungsgeschwindigkeit im Grazer Becken ungefähr zwischen 2 und 5 Meter pro Tag (bei relativ großem  $k_f$  und  $l$ ).

Die Gleichung für die Grundwassergeschwindigkeit kann aus dem Gesetz von DARCY und den allgemeinen Bewegungsgleichung für Flüssigkeiten abgeleitet werden.

Infolge der im Allgemeinen kleinen Fließgeschwindigkeiten ist der Strömungszustand laminar. Für die Grundwasserströmung gilt somit ein lineares Widerstandsgesetz.

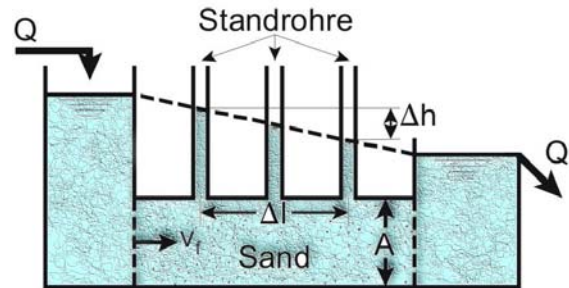


Abb. 3.2 Lineares Widerstandsgesetz nach DARCY

Das lineare Widerstandsgesetz nach DARCY lautet:

$$v_f = k_f \cdot \frac{\Delta h}{\Delta l} = k_f \cdot I \quad (\text{m/s})$$

$k_f$  (m/s) Durchlässigkeit

$I = h/l$  ..... Standrohrspiegelgefälle

Tab. 3.1 Richtwerte für Porenanteil und Durchlässigkeit

Bodenart	Porenanteil		Durchlässigkeit $k_f$ (m/s)
	gesamt $n$ (-)	durchstömbar $n_f$ (-)	
Kies, sandig	0,25 bis 0,35	0,20 bis 0,25	$3 \cdot 10^{-3}$ bis $5 \cdot 10^{-4}$
Sand, kiesig	0,28 bis 0,35	0,15 bis 0,20	$1 \cdot 10^{-3}$ bis $2 \cdot 10^{-4}$
Sand	0,30 bis 0,38	0,10 bis 0,15	$4 \cdot 10^{-4}$ bis $1 \cdot 10^{-4}$
Sand, schluffig	0,33 bis 0,40	0,08 bis 0,12	$2 \cdot 10^{-4}$ bis $1 \cdot 10^{-5}$
Schluff, sandig	0,35 bis 0,45	0,05 bis 0,10	$5 \cdot 10^{-5}$ bis $1 \cdot 10^{-6}$
Schluff, tonig	0,40 bis 0,55	0,03 bis 0,08	$5 \cdot 10^{-6}$ bis $1 \cdot 10^{-8}$
Ton, schluffig	0,45 bis 0,65	0,02 bis 0,05	$10^{-8}$

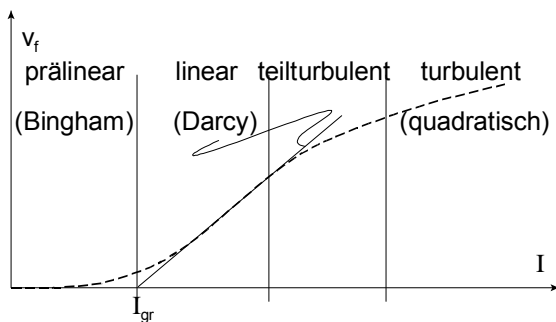


Abb. 3.3 Gültigkeitsbereich des Darcy'schen Gesetzes

Bewegungsgleichung ist vergleichbar mit dem Hooke'schen Gesetz der Elastizität (siehe Abb. 3.4; auch: Wärmeleitung, Ohm'sches Gesetz, ...).

Durch Steigerung der Fließgeschwindigkeit kann der Gültigkeitsbereich des linearen Widerstandsgesetzes überschritten werden (Trägheits- und Turbulenzkräfte). Dies ist z.B. durch zu starke Entnahme aus einem Brunnen in Brunnennähe möglich.

Wie für das Hooke'sche Gesetz gibt es für das Gesetz von Darcy Gültigkeitsbereiche (Abb. 3.3). Diese durch kritische Reynolds-Zahlen definiert.

Das Darcy'sche Gesetz als lineare Energie- bzw.

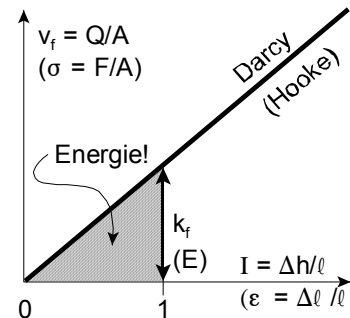


Abb. 3.4 Lineare Energiegesetz

### 3.2 Durchlässigkeit

Als Kennwert für die Durchlässigkeit eines porösen Mediums dienen die **Durchlässigkeit  $k_f$**  in m/s oder die spezifische Permeabilität  $K$  in  $m^2$ .

#### Definition

Die Durchlässigkeit  $k_{10^\circ C}$  in m/s gibt an, welcher Volumenstrom in  $m^3/s$  durch eine Fläche  $A$  von  $1 m^2$  des porösen Mediums strömt, wenn das Standrohrspiegelgefälle  $\partial(p/\gamma + z)/\partial r$  (dimensionslos) senkrecht zu dieser Fläche  $A$  gleich 1 ist und die Temperatur des porösen Mediums und des Volumenstroms  $10^\circ C$  beträgt.

$$k_{10^\circ C} = \frac{Q_{10^\circ C}}{A \cdot \partial(p/\gamma + z)/\partial r} \quad [m/s]$$

Die spezifische Permeabilität  $K$  in  $m^2$  dividiert durch die kinematische Zähigkeit  $\nu$  in  $m^2/s$  des strömenden Mediums gibt an, welcher Mengenstrom  $Q_p$  in N/s durch eine Fläche  $A$  von  $1 m^2$  des porösen Mediums strömt, wenn das Druckgefälle  $\partial(p/\gamma + z)/\partial r$  in  $N/m^3$  senkrecht zu dieser Fläche  $A$  gleich 1 ist.

Somit ergibt sich für

$$k_f = K \cdot \frac{g}{\nu} \quad [m/s]$$

$K (m^2)$  .....abhängig vom durchströmten Filter  
 $g/\nu (m^{-1} \cdot s^{-1})$  .....abhängig von der strömenden Flüssigkeit

Der Parameter  $k_f$  bzw.  $K$  (in  $m^2$ ) ist der wichtigste Stoffkennwert (Systemparameter) der Geohydraulik. Der Ermittlung dieser Grundgröße ist deshalb besondere Betrachtung zu schenken.

Tab. 3.2 Durchlässigkeitsbereiche für Locker- und Festgesteine

DURCHLÄSSIGKEIT $k_f$ [m/s]	durchlässig		schwer durchlässig				undurch-	GESTEINSART		
	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$	$10^{-7}$		$10^{-8}$	$10^{-9}$
LOCKERGESTEINE Porendurchlässigkeit	Kies		Sandiger Kies		Grobsand		Feinsand		Schluffiger Sand	
	Schluff		Schluffiger Ton		Ton					
	Dolomit		Kalkstein		Mergelkalkstein		Kalksandstein		Quarzit	
	Sandstein		Sandstein-Tonstein		Schluffstein		Tonstein		Metamorphite	
	gut		schlecht				Nicht-		leiter	
	engerer Bereich		Bandbreite Bereich				(Porendurchlässigkeiten können durch erhöhte Lagerungsdichte stark verringert werden)			

Der Parameter  $k_f$  bzw.  $K$  kennzeichnet den statistischen Mittelwert der Durchlässigkeit. Die durchströmte Fläche  $A$  muss bei seiner Ermittlung bzw. bei seiner späteren rechnerischen oder modelltechnischen Verwendung so groß sein, dass die Porenkanäle, Spalten, Klüfte und andere die Durchlässigkeit verursachende Hohlräume statistisch verteilt sind und den Mittelwert des Systems repräsentieren.

Während nicht bindige Böden und nicht geklüftetes poröses Felsgestein eine statistische Verteilung

der unterschiedlich ausgebildeten Porenkanäle schon auf einer Fläche von wenigen cm<sup>2</sup> aufweisen, besitzen bindige Böden sowie klüftige Felsgesteine eine Makrostruktur. Eine statistische Verteilung der Strömungswege ergibt dabei sich erst auf Flächen von einigen m<sup>2</sup> oder ist überhaupt nicht sinnvoll ausweisbar. Die Makrostruktur der Durchlässigkeit bindiger Böden wird vorwiegend durch Wurmlöcher, Wurzelkanäle und Schwindrisse verursacht. Bei der geringen Durchlässigkeit der Porenkanäle bindiger Böden beeinflussen solche Strömungswege die Gesamtdurchlässigkeit besonders stark.

Empirische Formeln zur Ermittlung des  $k_f$  – Wertes:

Hazen - Formel:  $k_f = \beta \cdot d_w^2$      $k_f$  (cm/s);  $d_w$  (cm);  $40 < \beta < 400$

Beyer und Schweiger (Busch):

$$k_f = C^{**} \cdot d_{10}^2 \quad C^{**}: \text{siehe Abb. 3.5}$$

Kozeny

$$k_f = \frac{d_w^2}{c'} \cdot \frac{n^3}{(1-n)^2} \quad \text{mit } c' \approx 180 - 300$$

Das Darcy-Gesetz ist nur so lange gültig, wie die bei seiner Ableitung getroffenen Voraussetzungen zutreffen. So verliert es beim Anwachsen der vernachlässigten Kräfte nach und nach seine Gültigkeit.

Bei wachsender Filtergeschwindigkeit wächst auch die Geschwindigkeit in den Porenkanälen an, und die Trägheitskräfte (Zentrifugalkräfte, Stoßverluste durch Querschnittsänderung der Porenkanäle sowie Abzweigverluste etc.) werden nach und nach wirksam.

Turbulenz und turbulente Reibung treten bei großen Geschwindigkeiten ein. Sie beschränken sich vorerst auf die großen Poren und erfassen erst nach und nach den gesamten Strömungsbereich. Der Charakter dieses Umstandes unterscheidet sich vollständig von dem bei der Rohr- oder Gerinneströmung. Für sehr kleine Geschwindigkeiten dagegen bleibt das Darcy-Gesetz bei Stoffen mit großen Porenkanalquerschnitten gültig.

Eine andere Gültigkeitsgrenze wird erreicht, wenn bei kleinen Porenkanalquerschnitten die elektromolekularen Kraftwirkungen an Bedeutung gewinnen. Durch diese Kräfte wird die Zähigkeit des bewegten Wassers scheinbar größer. Die gerichteten Dipole in der Nähe der gedachten Grenze zwischen frei beweglicher und lose gebundener Flüssigkeit halten einem gewissen Gradienten  $\partial h/\partial r$  stand, geraten dann aber in Unordnung und Bewegung. Es werden deshalb Erscheinungen wie bei Bingham'schen Flüssigkeiten beobachtet. Sind die Durchmesser der Porenkanäle kleiner als  $3 \cdot 10^{-6}$  bis  $8 \cdot 10^{-6}$  m, so verliert das Darcy-Gesetz aus diesen Gründen seine Gültigkeit. So können sehr kleine Durchlässigkeiten z. B. von Ton nur mit sehr hohen Drücken bestimmt werden, die in der Natur selten vorkommen.

Im Bereich der Gültigkeit des Darcy-Gesetzes ist die Filtergeschwindigkeit  $v$  eine lineare Funktion des Standrohrspiegelgefälles  $i = \partial h/\partial r$  (linearer Bereich). Beim Wirksamwerden der Trägheits- oder Haftkräfte besteht diese Linearität nicht mehr.

Obwohl für viele mathematische Berechnungen von Grundwasserströmungen die Idealisierung ange-

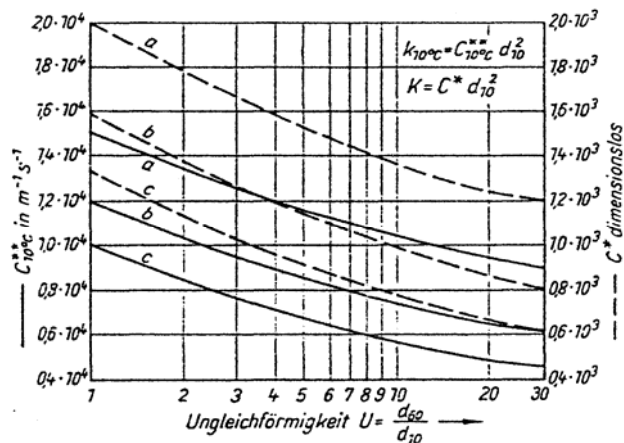


Abb. 3.5 Proportionalitätsfaktor  $C^*$  und  $C^{**}$  für Sande und Kiese (Beyer-Schweiger);  
 a lockere Lagerung,  
 b mittlere, natürliche Lagerung,  
 c dichte Lagerung

nommen wird, dass der Grundwasserleiter sowohl homogen als auch isotrop ist, kommen solche Grundwasserleiter in Wirklichkeit selten oder gar nicht vor. Am häufigsten verwendet wird die Annahme, dass die Durchlässigkeit einer Gesteins- bzw. Bodenart in horizontaler Richtung größer ist als in vertikaler Richtung; das gilt besonders für Lockergestein und geschichtetes Sedimentgestein.

### 3.3 Bewegungsgleichung

Nach dem Gesetz von HAGEN – POISEUILLE kann für die Annahme eines Ringspaltess mit stationärer Strömung folgende Formel aufgestellt werden:

$$\frac{d}{dr}(\tau \cdot r) = -\gamma \cdot I_r$$

$$\tau \cdot r = \eta \cdot \frac{dv}{dr} \cdot r = -\gamma \cdot I_r \cdot \frac{r^2}{2} + C_1$$

$$\frac{dv}{dr} = -\gamma \cdot \frac{I_r \cdot r}{2 \cdot \eta} + \frac{C_1}{\eta \cdot r}$$

$$v = -\gamma \cdot \frac{I_r \cdot r^2}{4 \cdot \eta} + \frac{C_1}{\eta} \cdot \ln r + C_2$$

Weil beim Kreisrohr für  $r = 0$  in der Achse

$$\frac{dv}{dr} = 0$$

ist, wird  $C_1 = 0$ .

$$\frac{dv}{dr} = -\gamma \cdot \frac{I_r \cdot r}{2 \cdot \eta}$$

$$v = -\gamma \cdot \frac{I_r \cdot r^2}{4 \cdot \eta} + C_2$$

Die Annahme des Haftens an der Wand bedingt  $v = 0$  für  $r = R$ .

$$C_2 = \gamma \cdot \frac{I \cdot R^2}{4 \cdot \eta} \text{ und } v = \frac{g \cdot I_r}{4 \cdot \nu} \cdot (R^2 - r^2)$$

$$v_{\max} = \frac{g \cdot I_r}{4 \cdot \nu} \cdot R^2 \text{ für } r = 0$$

und der Durchfluss beträgt

$$Q = 2 \cdot \pi \int_0^R v \cdot r \cdot dr = g \cdot \frac{I_r \cdot \pi \cdot R^4}{8 \cdot \nu}$$

und somit ergibt sich eine mittlere Geschwindigkeit von

$$v_m = \frac{g \cdot I_r}{8 \cdot \nu} \cdot R^2$$

und daraus ein Energiegefälle von

$$I_r = \frac{8 \cdot \nu}{g \cdot R^2} \cdot \bar{v} = \frac{32 \cdot \nu}{g \cdot d^2} \cdot \bar{v},$$

wird nun die Kontinuität mit  $Q = \bar{v} \cdot n_f \cdot A$  und die Filtergeschwindigkeit mit

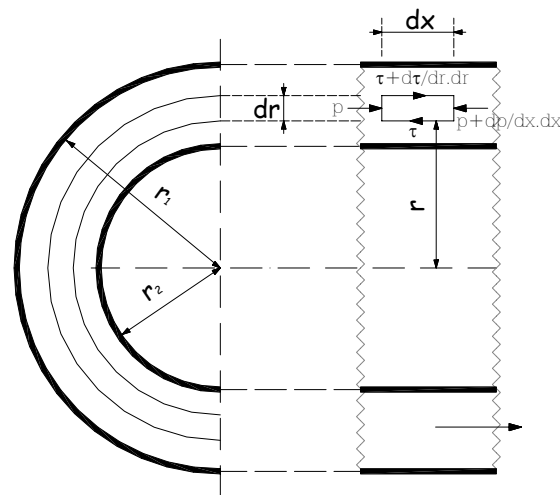


Abb. 3.6 Ringspalt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT GRAZ INSTITUT FÜR SIEDLUNGSWASSERWIRTSCHAFT UND LANDSCHAFTSWASSERBAU VORSTAND: UNIV.-PROF. DDIPL.-ING. DR. HARALD KAINZ	HYDRAULIK VA (215.011) VORLESUNG KAUCH GRUNDWASSERHYDRAULIK	SEITE 18
		WS 2004

$$v_f = \frac{Q}{A} = n_f \cdot v_a,$$

somit erhält man für das Energiegefälle folgende Schreibweise

$$I_r = \frac{32 \cdot v}{g \cdot d_k^2} \cdot \frac{v_f}{n_f},$$

daraus folgt eine Filtergeschwindigkeit von

$$v_f = \frac{d_k^2 \cdot n_f \cdot g}{32 \cdot v} \cdot I_r.$$

Vergleiche:

$$k_f = \frac{d_k^2 \cdot n_f \cdot g}{32 \cdot v}$$

Gemäß dem Bernoullischen Gesetz kann folgendes aufgestellt werden:

$$H = \frac{v^2}{2 \cdot g} + \frac{p}{\gamma} + z + h_r \quad \text{bzw. für } v \ll$$

$$H = \frac{p}{\gamma} + z + h_r.$$

Nach dem Weg s abgeleitet

$$\frac{dH}{ds} = \frac{d}{ds} \left( \frac{p}{\gamma} + z \right) + \frac{d}{ds} h_r = 0$$

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{p}{\gamma} + z \right) = - \frac{dh_r}{ds} = -I_r$$

$$\text{Energiegefälle} = \text{Standrohrspiegelgefälle} \left( \frac{v^2}{2 \cdot g} \ll \right)$$

Die Filtergeschwindigkeit kann folgendermaßen angeschrieben werden:

$$v_f = -k_f \cdot \frac{dh}{ds} \quad \text{bzw.} \quad v_f = \frac{d}{ds} \cdot (-k_f \cdot h)$$

mit  $-k_f \cdot h = \varphi$ , wobei  $\varphi$  das Geschwindigkeitspotential kennzeichnet. Das Minus ergibt sich aus der Bedingung, dass bei positiver Steigung mathematisch gesehen eine negative Geschwindigkeit folgen muss.

Potentialströmung

$$v_f = \frac{d\varphi}{ds} \quad (\text{eindimensional}) \quad v_f = \text{grad } \varphi \quad (\text{mehrdimensional})$$

Potentialströmungen sind wirbelfreie Strömungen.

$$\text{rot } \vec{v}_f = 0$$

Daraus wird der Begriff „**Pseudopotentialströmung bzw. Falsche Potentialströmungen**“ gebildet. Denn Grundwasserströmungen sind nicht wirbelfrei.

### 3.4 Transmissivität (Transportvermögen)

Die Fähigkeit eines Grundwasserleiters, Wasser mit einer bestimmten Viskosität zu transportieren, nennt man die Transmissivität. Die Transmissivität  $T$  eines Grundwasserleiters ist gleich der Durchlässigkeit  $k_f$  [m/s] mal der Mächtigkeit  $h_{GW}$  [m] des Grundwasserleiters.

$$T = k_f \cdot h_{GW} \quad [m^2/s].$$

Die Transmissivität ist auch der Begriff der zweidimensionalen bzw. ebenen Grundwasserbewegung. Sie kann auch als Transportvermögen für  $b = 1$  m und für ein Gefälle von  $l = 1$  (senkrechte Bewegung) bezeichnet werden. Sie kann auch ermittelt werden für geschichtete Grundwasserleiter mit unterschiedlicher Schichtdicke  $\Delta h_i$  und Durchlässigkeit  $k_{f,i}$ :

$$T = \sum_{i=1}^n k_{f,i} \cdot \Delta h_i,$$

wobei  $n$  die Anzahl der einzelnen Schichten ist. Theoretisch lautet der Ansatz

$$T = \int_0^{h_{GW}} k_f \cdot dh.$$

### 3.5 Speicherkoeffizient und Speichervermögen

Die Fähigkeit eines wasserhaltigen Materials das Wasser zu speichern und fortzuleiten, ist seine wichtigste hydraulische Eigenschaft.

Der Speicherkoeffizient ist definiert als Wassermenge, die ein Grundwasserleiter pro Flächeneinheit und pro Höhe oder bei einer Druckspiegeländerung maximal aufnehmen oder abgeben kann.

$$S = \frac{\Delta V}{A \cdot \Delta h} \quad [-]$$

#### Ungespannt (Freier Wasserspiegel):

Bei ungespannten Verhältnissen sickert das Wasser hauptsächlich unter Einwirkung der Schwerkraft aus den Bodenbereichen, durch die die Wasserspiegelabsenkung verläuft. In einem freien Grundwasserleiter ist die Wassermenge aufgrund der Wasserausdehnung und der Kompression des Grundwasserleiters vernachlässigbar. In einem solchen Grundwasserleiter ist also der Speicherkoeffizient praktisch gleich dem nutzbaren Hohlraumanteil (durchflusswirksamer,  $\approx$  entwässerbarer Porenanteil).

$$S = n_f \approx 0,05 - 0,35$$

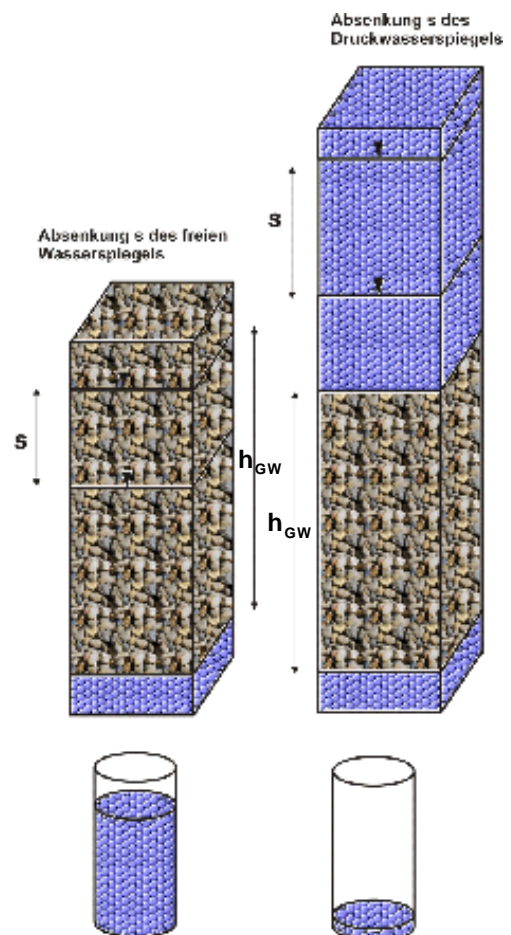


Abb. 3.7 Speicherkoeffizient bei freiem Wasserspiegel und bei Druckwasserspiegel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT GRAZ INSTITUT FÜR SIEDLUNGSWASSERWIRTSCHAFT UND LANDSCHAFTSWASSERBAU VORSTAND: UNIV.-PROF. DDIPL.-ING. DR. HARALD KAINZ	HYDRAULIK VA (215.011) VORLESUNG KAUCH GRUNDWASSERHYDRAULIK	SEITE 20
		WS 2004

### Gespanntes Grundwasser:

Maßgeblichen Einfluss auf den Speicherkoeffizient ist das elastische Verhalten des Wassers, der Korngerüsts und der einzelnen Körner.

$$S = \gamma \cdot h_{GW} \cdot \left( \frac{n}{E_W} + \frac{1}{E_G} \right) \approx 10^{-3} - 10^{-5}$$

$h_{GW}$  ..... Mächtigkeit des Grundwasserleiters

$E_W$  ..... Elastizitätsmodul des Wassers  $\approx 2 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$

$E_G$  ..... Elastizitätsmodul des Korngerüsts  $\approx 10^8$  bis  $10^{10} \text{ N/m}^2$

Der Wert für gespanntes Grundwasser resultiert aus der Kompression des Grundwasserleiters. Die von oben auf den Grundwasserleiter wirkende Gesamtlast wird zum einen vom Korngerüst und zum anderen vom hydraulischen Gegendruck, den das Wasser im Grundwasserleiter aufbringt, aufgenommen. Wenn der Wasserdruck sinkt, muss ein größerer Teil der Last vom Korngerüst getragen werden. Dies hat zur Folge, dass die Gesteinspartikel umsortiert und der Porenraum reduziert wird. Das Wasser, das bei dieser Volumenverringerng aus den Poren gedrückt wird, stellt den Teil des Speicherkoeffizienten dar, der aus der Kompression des Grundwasserleiters resultiert.

$$\text{Spezifischer Speicherkoeffizient: } S_0 = \frac{S}{h_{GW}} \left[ \frac{1}{m} \right]$$

## 3.6 Algebraische Lösungsverfahren

### Bewegungs- bzw. Energiegleichung:

Darcy'sches Gesetz:

$$v_f = k_f \cdot I \quad (\text{m/s}) \quad (\text{eigentlich } \text{m}^3/\text{m}^2 \cdot \text{s})$$

$v_f$  ..... Filtergeschwindigkeit [m/s]

$k_f$  ..... Durchlässigkeit [m/s]

$I$  ..... Standrohrspiegelgefälle [1]

$$I = - \frac{dh}{ds}$$

$h$  ..... Standrohrspiegelhöhe [m]

$s$  ..... Stromlinienweg [m]

$$v_f = -k_f \cdot \frac{dh}{ds} = \frac{d(-k_f \cdot h)}{ds}$$

$\varphi = -k_f \cdot h$  ..... Grundwasserpotential [m<sup>2</sup>/s]

$v_f = \frac{d\varphi}{ds}$  ..... (Ableitung in Strömungsrichtung, eindimensional)

$v_f = \text{grad } \varphi$  ... (mehrdimensional)

Grundwasserströmung = Pseudopotentialströmung

### Kontinuitätsgleichung (Abb. 3.8):

Zufluss in Richtung x:

$$v_x \cdot dy \cdot dz$$

Abfluss in Richtung x:

$$(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot dx) \cdot dy \cdot dz$$

und die Differenz ist

$$\Delta Q(x) = \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

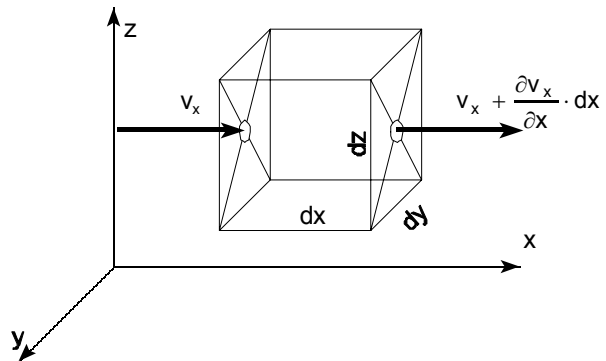


Abb. 3.8 Ableitung der Kontinuitätsgleichung

Die Summe aller Zu- und Abflüsse im Volumenelement muss 0 sein. Damit ergibt sich

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Wird nun diese Kontinuitätsgleichung in die Bewegungsgleichung ( $v_f = \text{grad } \varphi$ ) eingesetzt, so ergibt sich die Laplace-Gleichung.

Laplace (3-dimensionale Strömung):

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

$$\Delta \varphi = 0$$

bzw. für die 2-dimensionale, ebene Strömung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

Die Laplace-Gleichung ist linear (kein  $\varphi^2$  oder  $\varphi \cdot \partial \varphi$ ). Somit sind verschiedene Lösungen der Gleichung superponierbar (Vergleich Hooke'sches Gesetz: mit Schnee links plus Schnee rechts mal Faktor ergibt Eigengewicht des Daches).

### 3.6.1 Eindimensionale Lösungen

Die Abb. 3.9 zeigt eine einfache eindimensionale Grundwasserströmung. Die Dicke der Schicht ist 1. Gemäß der Kontinuitätsgleichung ergibt sich

$$Q = v_f \cdot A = v_f \cdot d \cdot 1 = v_f \cdot d$$

und mit der Bewegungsgleichung (Darcy-Gesetz)

$$v_f = k_f \cdot I \quad \text{mit} \quad I = \frac{h_1 - h_2}{l}$$

ergibt sich der Durchfluss

$$Q = k_f \cdot \frac{h_1 - h_2}{l} \cdot d$$

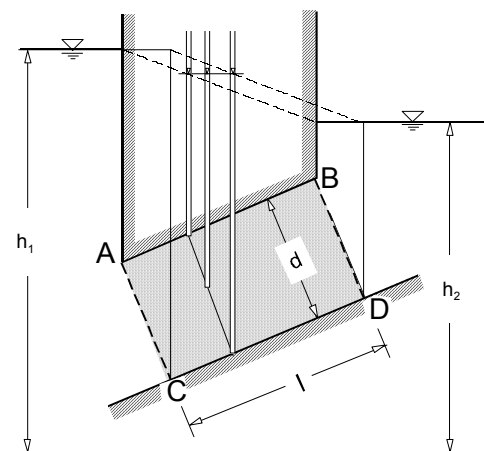


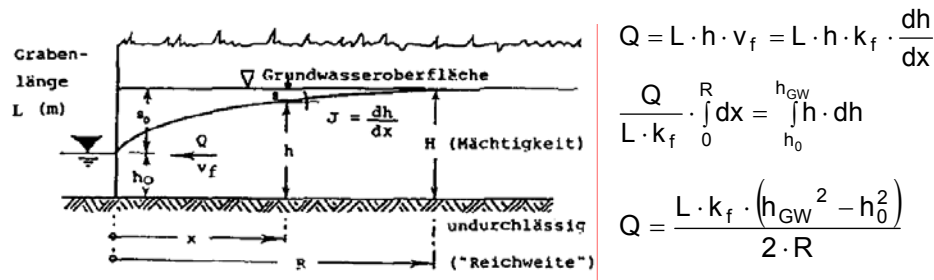
Abb. 3.9 Eindimensionale Filterströmung

Zuströmung zu einem vollkommenen Brunnen bei gespanntem Grundwasser (Abb. 3.10):

Der Zufluss zum Brunnen ist



Zuströmung zu einem vollkommenen Graben mit der Länge L bei freiem Grundwasser:



$$Q = L \cdot h \cdot v_f = L \cdot h \cdot k_f \cdot \frac{dh}{dx}$$

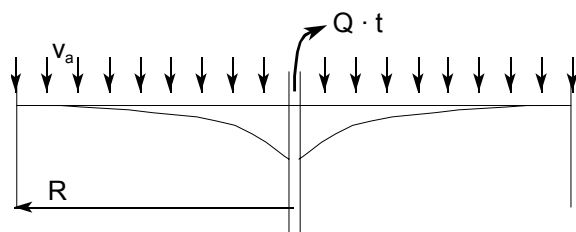
$$\frac{Q}{L \cdot k_f} \cdot \int_0^R dx = \int_{h_0}^{h_{GW}} h \cdot dh$$

$$Q = \frac{L \cdot k_f \cdot (h_{GW}^2 - h_0^2)}{2 \cdot R}$$

Abb. 3.12 Zuströmung vollkommener Graben

$$\text{Reichweite: } R = 3000 \cdot s \cdot \sqrt{k_f} \quad (\text{Sichardt})$$

In den Brunnenformeln ist immer wieder die Größe der Reichweite der Absenkung R einzusetzen. Dieses R ist eigentlich eine Bilanzgröße, d.h. abhängig von den Anreicherungsbedingungen im Zuflussbereich zum Brunnen (Abb. 3.13).



Gemäß Abb. 3.13 gilt als Kontinuität

$$R^2 \cdot \pi \cdot v_a = Q \cdot t$$

mit  $v_a$  (m/a) als jährliche Grundwasseranreicherung und  $Q \cdot t$  als jährliche Entnahme in  $\text{m}^3$ . Damit wird

$$R = \sqrt{\frac{Q \cdot t}{\pi \cdot v_a}} \quad (\text{m})$$

Abb. 3.13 Die Reichweite als Bilanzgröße

Setzt man noch näherungsweise für Q gleich  $s \cdot k_f \cdot h_{GW}$ , so bekommen die bekannten Reichweitenformeln (Tab. 3.3) eine ähnliche Struktur.

Beispiel:

Für eine kontinuierliche Entnahme von  $Q = 100 \text{ l/s}$  ( $0,1 \text{ m}^3$ ) über ein Jahr ( $t = 3,15 \cdot 10^7$ ) und einer jährlichen Anreicherung von  $v_a = 0,25 \text{ m}$  ergibt sich

$$R = \sqrt{\frac{Q \cdot t}{\pi \cdot v_a}} = \sqrt{\frac{0,1 \cdot 3,15 \cdot 10^7}{\pi \cdot 0,25}} = 2000 \text{ m}$$

In der Praxis werden zumeist statistisch ermittelte Größen für R eingesetzt (Tab. 3.3)

Tab. 3.3 Einige Reichweitenformeln

	Formel	Erläuterung
Sichardt	$R = 3000 \cdot s \cdot \sqrt{k_f}$	R und s in m, $k_f$ in m/s
Kussakin	$R = 588 \cdot s \cdot \sqrt{k_f \cdot h_{GW}}$	$k_f \cdot h_{GW}$ : Transmissivität
Schulze und Weber	$R = 3 \cdot \sqrt{\frac{k_f \cdot h_{GW} \cdot t}{S}}$	t ... Pumpdauer S ... Speichervermögen
Maekelburg	$R = 3,05 \cdot \sqrt{\frac{k_f \cdot h_{GW} \cdot t}{S} \cdot \lg \frac{Q}{Q_1}}$	Q ... Fördermenge $Q_1$ ... Randzufluss

### 3.6.2 Zweidimensionale Lösungen (Ebene Potentialströmungen)

Laplace'sche Differentialgleichung:  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$

Potentialfunktion:  $\varphi = \varphi(x, y)$       Potentiallinien:  $\varphi = \text{const.}$

Stromfunktion:  $\psi = \psi(x, y)$       Stromlinien:  $\psi = \text{const.}$

Cauchy – Riemann (orthogonal):

$$v_x = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\psi}{dy} \quad v_y = \frac{d\varphi}{dy} = -\frac{d\psi}{dx}$$

bzw. nach Transformation in Polarkoordinaten

$$v_r = \frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{r} \cdot \frac{d\psi}{d\vartheta} \quad v_\vartheta = \frac{1}{r} \cdot \frac{d\varphi}{d\vartheta} = -\frac{d\psi}{dr}$$

Lösungen mit Hilfe der komplexen Funktionen (konforme Abbildungen)

Komplexe Variable  $z = x + i \cdot y = r \cdot e^{i\vartheta}$

Komplexe Funktion  $w = \varphi + i \cdot \psi = \varphi(x, y) + i \cdot \psi(x, y)$

Komplex konjugierte Geschwindigkeit  $\bar{v} = v_x - i \cdot v_y = \frac{dw}{dz}$

Die Stromfunktion  $\psi$  erfüllt wegen  $\text{rot } \vec{v} = 0$  ebenfalls die Laplace'sche Differentialgleichung (Vertauschbarkeit von Strom- und Potentiallinien)

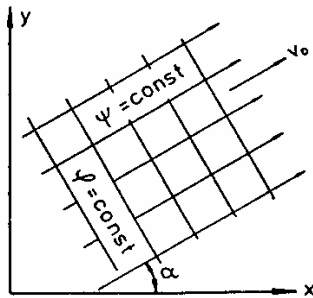


Abb. 3.14 Ebene Parallelströmung

#### Ebene Parallelströmung

$$\omega = v_0 \cdot r \cdot e^{i(\vartheta - \alpha)}$$

für  $\alpha = 0$ :  $\omega = v_0 \cdot r \cdot e^{i\vartheta} = v_0 \cdot z$

Anwendungsbeispiel: Ebenes Grundwasserfeld

#### Eckströmung

$$\omega = C \cdot z^n$$

$\alpha = \frac{\pi}{n}$  bzw.  $n = \frac{\pi}{\alpha}$  Singularität:

$$v = c \cdot n \cdot r^{n-1}$$

$0 \leq \alpha < \pi$ :  $v = 0$

$\pi \leq \alpha < 2\pi$ :  $v = \infty$

Anwendungsbeispiel: Umströmung einer Fundamentecke

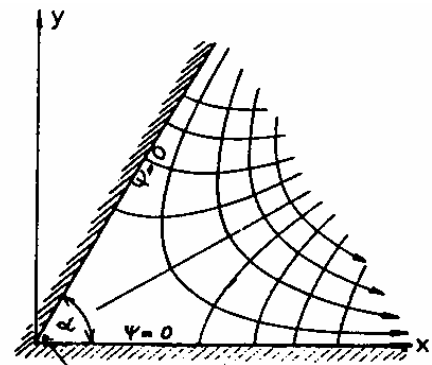
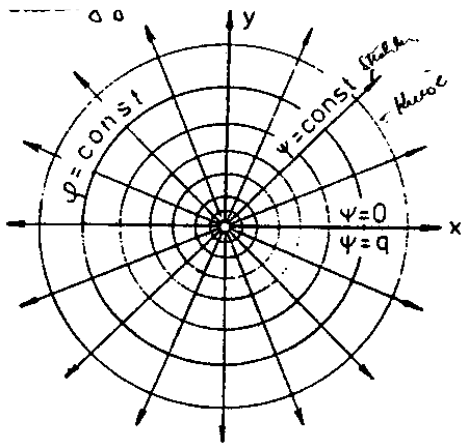


Abb. 3.15 Eckströmung

### Quell - Strömungen



$$\omega = \frac{q}{2 \cdot \pi} \cdot \ln z$$

$$v_r = \frac{q}{2 \cdot \pi \cdot r}$$

Singularität: Quelle/Senke:  $v = \infty$

Umkehrung: Kreisströmung  $\omega = \frac{\Gamma}{2 \cdot \pi} \cdot i \cdot \ln z$

Anwendungsbeispiel: Einzelbrunnen im ruhenden Grundwasser

Abb. 3.16 Quell - Senken - Strömungen

### Quell - Senken - Strömung

Lineare Kombination von einer Quellen- und einer Senkenströmung.

$$\omega = \frac{q}{2 \cdot \pi} \cdot \ln \frac{z+a}{z-a}$$

Anwendungsbeispiel: Doppelbrunnen (Schluck- und Entnahmebrunnen in ruhendem Grundwasserfeld z. B. bei einer Wärmepumpe)

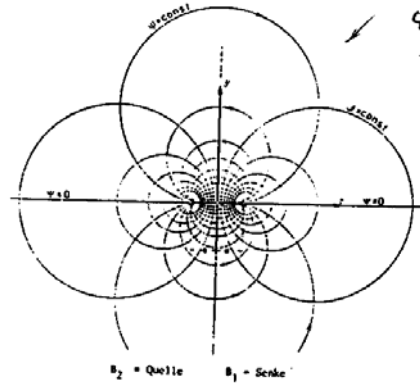


Abb. 3.17 Quell - Senken - Strömung

Quell-Senkenströmung im Parallelstrom (zuerst Senke im Parallelstrom danach Quelle)

$$\omega = v_0 \cdot z - \frac{q}{2 \cdot \pi} \cdot \ln \frac{z+a}{z-a}$$

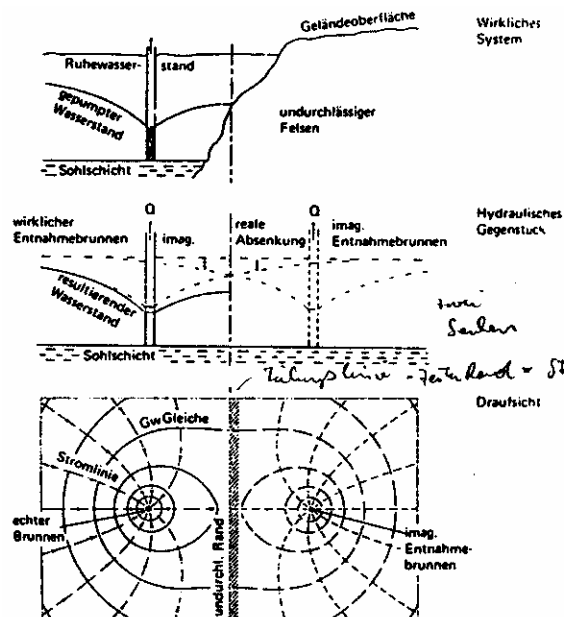


Abb. 3.19 Doppelsenkenströmung

Anwendungsbeispiel: Entnahme- und Schluckbrunnen (auch Systeme) in einem Grundwasserstrom.

### Doppelsenkenströmung ohne Parallelstrom

Ergänzung einer (imaginären) Senke zur Darstellung eines festen, asymmetrisch gelegenen Randes

$$\omega = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \left[ \ln(z+a) + \ln(z^2 - a^2) \right]$$

$$\omega = \frac{q}{2 \cdot \pi} \cdot \ln(z^2 - a^2)$$

$$\vec{v} = \frac{q}{\pi} \cdot \frac{z}{z^2 - a^2}$$

Singularitäten: Brunnen ( $z = a$ ):  $v = \infty$

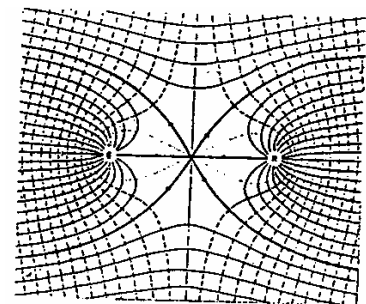


Abb. 3.18 Quell-Senkenströmung im Parallelstrom

Staupunkt ( $z = 0$ ):  $v = 0$

Beliebige Mehrfachkombinationen sind möglich.

Anwendungsbeispiel: Brunnen in einem seitlich begrenzten Grundwasserfeld (asymmetrische Brunnenlage, Lage des Brunnens nahe dem undurchlässigen Rand)

### Senke im Parallelstrom

$$\omega = v_0 \cdot z - \frac{q}{2 \cdot \pi} \cdot \ln z$$

$$\bar{v} = v_0 - \frac{q}{2 \cdot \pi \cdot z}$$

Singularitäten: Senke (Ursprung):  $v = \infty$

Staupunkt ( $x = x_1$ ):  $v = 0$

$$x_1 = \frac{q}{2 \cdot \pi \cdot v_0} = \frac{b}{2 \cdot \pi}$$

$$\text{Einzugsbreite: } b = \frac{q}{v_0}$$

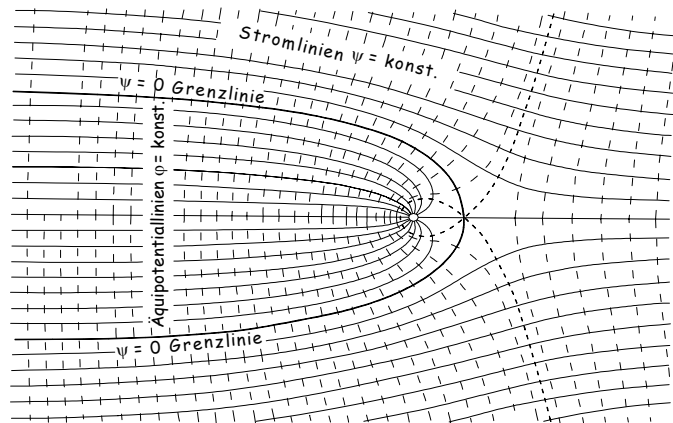


Abb. 3.20 Senke im Parallelstrom

Anwendungsbeispiel: Brunnen im Grundwasserfeld, Bestimmung des Schutzgebietes.

### Kreiszyylinder in Parallelströmung

$$w = v_0 \cdot \left( z + \frac{a^2}{z} \right)$$

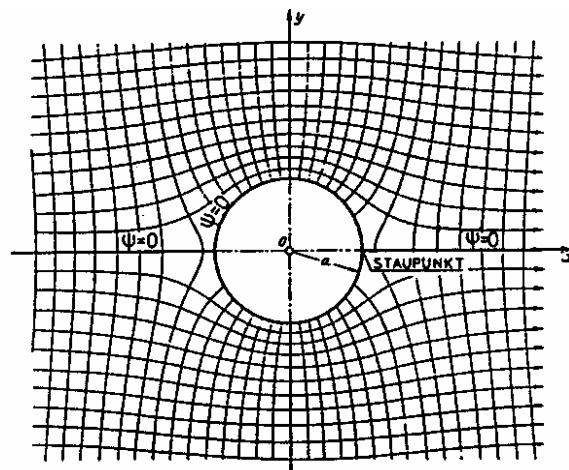
$$\bar{v} = v_0 \cdot \left( 1 - \frac{a^2}{z^2} \right)$$

Singulärstellen:  $r = a$

$$\vartheta = 0 \text{ und } -\pi : v = 0$$

(Staupunkte)

Anwendungsbeispiel: Umströmung eines kreisförmigen Körpers (Kreis ist Stromlinie  $\psi = 0$ )



Anwendungsbeispiel: Durchströmung eines kreisförmigen Beckens (Brunnenrohr, See – nur bei Betrachtung als 2-dimensionale Strömung; Kreis ist Potentiallinie  $\phi = 0$ )

## 3.7 Richtungsänderung an Trennflächen

An Trennflächen zwischen homogenen Grundwasserleitern unterschiedlicher Durchlässigkeit ändern sich die Richtungen der Strom- und Potentiallinien.

Wenn Stromlinien ausgehend von einem Medium mit der Durchlässigkeit  $k_1$  auf eine Grenzfläche zu einem Medium mit der Durchlässigkeit  $k_2$  auftreffen, werden sie ähnlich wie Lichtstrahlen gebrochen.

