

BAUWESEN

WISSEN

Detlef Aigner (Hrsg.)
Dirk Carstensen (Hrsg.)

Technische Hydromechanik 2

Spezialfälle

2., vollständig überarbeitete Auflage

Beuth

Herausgegeben von:

Detlef Aigner

Dirk Carstensen

Mit Beiträgen von:

Detlef Aigner

Dirk Carstensen

Günter Glazik

Willi Kraatz

Jörg Kranawetterer

Helmut Martin

Harold Wagner

Technische Hydromechanik 2

Spezialfälle

2., vollständig überarbeitete Auflage 2015

Beuth Verlag GmbH · Berlin · Wien · Zürich

© 2015 Beuth Verlag GmbH
Berlin · Wien · Zürich

Am DIN-Platz
Burggrafenstraße 6
10787 Berlin

Telefon: +49 30 2601-0
Telefax: +49 30 2601-1260
Internet: www.beuth.de
E-Mail: kundenservice@beuth.de

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der Grenzen des Urheberrechts ist ohne schriftliche Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung in elektronische Systeme.

Die im Werk enthaltenen Inhalte wurden vom Verfasser und Verlag sorgfältig erarbeitet und geprüft. Eine Gewährleistung für die Richtigkeit des Inhalts wird gleichwohl nicht übernommen. Der Verlag haftet nur für Schäden, die auf Vorsatz oder grobe Fahrlässigkeit seitens des Verlages zurückzuführen sind. Im Übrigen ist die Haftung ausgeschlossen.

Titelbild: © Igor Kolos/Fotolia.com
Satz: Beltz Bad Langensalza GmbH, Bad Langensalza
Druck: Colonel, Krakow

Gedruckt auf säurefreiem, alterungsbeständigem Papier nach DIN EN ISO 9706

ISBN 978-3-410-22209-5
ISBN 978-3-410-22210-1 (E-Book)

3 Dichteströmungen

3.1 Begriffsbestimmung und Abgrenzung

Als Dichteströmungen werden alle diejenigen Strömungsvorgänge bezeichnet, bei denen das Strömungsverhalten maßgeblich durch Dichteunterschiede zwischen den einzelnen Schichten einer Flüssigkeit oder zwischen Schichten unterschiedlicher Flüssigkeiten bestimmt wird. Der Begriff der Dichteströmung ist somit irreführend, weil nicht die Dichte strömt, sondern die Flüssigkeit unter dem Einfluss der Dichte. Im Zusammenhang mit der Untersuchung von Dichteschichtungen bzw. -strömungen müssen folgende Fragen beantwortet werden:

- Unter welchen Bedingungen tritt überhaupt eine Dichteströmung auf?
- Wann tritt eine Vermischung zweier Schichten auf, und wie wirkt sie sich aus?
- Wie erfolgt der Übergang von einer Strömung mit homogener Dichte zu einem Zwei- oder Mehrschichtensystem?
- Welche Bedingungen bestimmen den Verlauf der Schichtgrenze zwischen zwei Schichten mit unterschiedlicher Dichte?
- Welche Bedingungen müssen erfüllt werden, damit aus einem kontinuierlich oder diskontinuierlich geschichteten Wasserkörper nur Wasser einer bestimmten Schicht entnommen wird?

Ursachen für Dichteunterschiede bei Wasser als dem wichtigsten Medium können sein:

- Temperaturunterschiede: $\Delta\rho \approx 2 \text{ kg/m}^3$ bei einer Temperaturdifferenz von 10 K (z.B. thermische Schichtung in stehenden Gewässern, Einleitung von Kühlwasser)
- Salzgehaltsunterschiede: $\Delta\rho \approx 20 \text{ kg/m}^3$ bei einer Salzgehaltsdifferenz von 3 ‰ (z.B. saline Schichtung an einer Strommündung)
- Trübstoffgehaltsunterschiede: $\Delta\rho \approx 200 \text{ kg/m}^3$ (z. B. Eintritt einer stark trübstoff-beladenen Strömung in eine Talsperre).

Bei thermischen und salinen Dichtedifferenzen bleibt die Schichtung erhalten, auch wenn die Flüssigkeit in Ruhe ist; es sind statische Schichtungen. Dagegen ist bei der trübstoffbeladenen Strömung die Dichte von der Strömungsgeschwindigkeit abhängig; eine Schichtung ist in diesem Fall dynamisch bedingt.

Die Dichte von Wasser kann in Abhängigkeit von der Temperatur T in °C nach *Hutter & Trösch* (1975) mit

$$\rho(T) = \left(0,059385 \cdot T^3 - 8,56272 \cdot T^2 + 65,4891 \cdot T\right) \cdot 10^{-6} + 0,999843 \quad (3.1)$$

angegeben werden, sowie die Änderung mit der Leitfähigkeit χ in $\mu\text{S/cm}$ nach *Bühner & Ambühl* (1975) mit

$$\Delta\rho(T, \chi) = (-0,00001222651 \cdot T^3 + 0,00114842 \cdot T^2 - 0,0541369 \cdot T + 1,72118) \cdot 0,64 \cdot 10^{-6} \cdot \chi$$

während die Änderung der Dichte mit dem Druck (d.h. der Tiefenlage) nicht berücksichtigt werden muss, weil sie in gleicher Größenordnung auch bei homogener Temperatur und homogenem Salzgehalt auftreten wird.

3.2 Grundlagen der Bewegung in geschichteten Medien

3.2.1 Ähnlichkeitskennzahlen

Die Kenntnis der Dichtedifferenz $\Delta\rho$ allein ist beim Vergleich einer Süßwasserströmung über Salzwasser mit einer von der Geometrie her ähnlichen Warmluftströmung über Kaltluft (z. B. Vergleich des Öffnens eines Schleusentores an einer Seeschleuse mit dem Öffnen eines Zimmerfensters im Winter) nicht ausreichend. Es wird deshalb als erste Ähnlichkeitskennzahl die relative Dichtedifferenz $\Delta\rho/\rho$ gebildet, wobei die Dichtedifferenz $\Delta\rho$ auf die Dichte einer Schicht bezogen wird, nicht auf die mittlere Dichte.

Bei turbulenter Bewegung in einer Schicht wirkt die Schichtgrenze behindernd auf den turbulenten Austausch. Ein Turbulenzballen aus der unteren Schicht müsste beim Überschreiten der Schichtgrenze gegen die Wirkung der Schwerkraft gehoben werden, wozu eine vom Dichteunterschied abhängige Arbeit verrichtet werden muss. Die erforderliche Energie kann nur aus der Energie der turbulenten Schwankungsbewegung entnommen werden, die proportional dem Quadrat des Geschwindigkeitsgradienten ist. Das Verhältnis der Arbeit zur Energie wird als *Richardsonzahl* bezeichnet:

$$Ri = \frac{g \frac{d\rho}{dz}}{\rho \left(\frac{dv}{dz} \right)^2} \quad (3.2)$$

Darin bedeuten $d\rho/dz$ und dv/dz die Änderungen der Dichte bzw. der Geschwindigkeit mit der Höhe in einer bestimmten Höhe z . Aus theoretischen Untersuchungen, die versuchs technisch bestätigt wurden, folgt, dass bei $Ri > 1/24$ kein Austausch zwischen den beiden Schichten erfolgt. Daraus kann abgeleitet werden, dass zwischen zwei Schichten mit dem Dichteunterschied $\Delta\rho$ und dem Geschwindigkeitsunterschied Δv dann keine gegenseitige Beeinflussung mehr stattfindet, wenn sich infolge von Vermischung der anfängliche Sprung in der Dichteverteilung in eine Zwischenschicht mit der Höhe

$$\Delta z > \frac{(\Delta v)^2}{24 \cdot g \cdot \frac{\Delta\rho}{\rho}} \quad (3.3)$$

ausgebildet hat.

Führt man in Gl. (3.2) statt der differentiellen Größen solche ein, die eine ganze Schicht beschreiben, d.h. h statt dz und v statt dv , so erhält man eine globale *Richardsonzahl*, die als Reziprokwert des Quadrats einer abgewandelten *Froudezahl* verstanden werden kann:

$$Ri_0 = \frac{g \cdot \frac{\Delta\rho}{\rho} \cdot h}{v^2} = \frac{1}{Fr_\Delta^2} \quad (3.4)$$

Diese reduzierte *Froudezahl* (s. auch Gl. (1.32) und Gl. (5.102))

$$Fr_A = \frac{v}{\sqrt{g \cdot \frac{\Delta\rho}{\rho} \cdot h}} \quad (3.5)$$

tritt bei geschichteten Strömungen an die Stelle der üblichen *Froudezahl*. Fasst man z. B. die Freispiegelströmung des Wassers als Dichteströmung einer Wasserschicht unter einer Luftschicht auf, dann kann die Dichte der Luft von etwa $1,3 \text{ kg/m}^3$ gegenüber der des Wassers von 1000 kg/m^3 vernachlässigt werden, womit der Aus-

druck $\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{1000 - 1,3}{1000}$ für die Wasserschicht zu 1 wird. Durch die reduzierte *Frou-*

dezahl wird demnach eine fließende schwere Schicht unter einer ruhenden leichteren auf das geläufigere Bild der Freispiegelströmung zurückgeführt.

Eingehende Untersuchungen des Verhaltens der Flüssigkeiten an der Schichtgrenze zwischen einer ruhenden und einer bewegten Schicht durch *Keulegan* (1949) zeigten, dass ein Sprung im Dichteverlauf nur bei sehr kleinen Geschwindigkeitsdifferenzen zwischen den Schichten auftritt. Mit zunehmender Geschwindigkeitsdifferenz zwischen den Schichten treten Wellen an der Schichtgrenze auf, deren zunächst flache, abgerundete Wellenberge immer höher und spitzer werden, bis sich schließlich Wirbelballen ablösen und in die andere Schicht eindringen. Durch diesen Masseaustausch infolge brechender Grenzflächenwellen bildet sich eine Zwischenschicht mit einem endlichen Dichtegradienten (statt des unendlichen Gradienten bei einem Dichtesprung) aus.

Für die Geschwindigkeit, bei der die Mischung beginnt, leitet *Keulegan* folgendes Kriterium ab:

$$Ke = \frac{\left(v \cdot g \cdot \frac{\Delta\rho}{\rho} \right)^{\frac{1}{3}}}{v} \quad (3.6)$$

Diese Zahl nimmt für *Reynoldszahlen* (gebildet mit der mittleren Geschwindigkeit und dem hydraulischen Radius) unter 1800 (laminares Fließen) den Wert $Ke = 0,127$ und für größere *Reynoldszahlen* $Ke = 0,178$ an. Setzt man die kinematische Zähigkeit ν mit $1,31 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ und die relative Dichtedifferenz $\Delta\rho/\rho$ mit 0,002 an (entsprechend einer Temperaturdifferenz von 10 K), dann ergibt sich $v = 0,023 \text{ m/s}$. Damit ist praktisch bei thermischer Schichtung eine scharfe Dichtediskontinuität nicht möglich; es wird sich eine Zwischenschicht ausbilden.

3.2.2 Maximale Ausbreitungsgeschwindigkeit

Bei der Einleitung warmen Kühlwassers in einen Fluss erhebt sich die Frage, mit welcher Geschwindigkeit sich das Wasser stromauf bewegen kann oder welche Fließgeschwindigkeit im Fluss vorhanden sein muss, damit es sich nicht stromauf bewegt. Um diese Frage zu untersuchen, betrachten wir zwei Wasserkörper unterschiedlicher Dichte, die durch eine Wand getrennt sind (Bild 3.1) (*Kranawettreiser*,

1973). Die Druckkräfte von beiden Seiten auf die Trennwand sollen gleich sein. Wegen der daraus folgenden unterschiedlichen Wassertiefen ergibt sich eine resultierende Druckverteilung auf die Trennwand, die in halber Tiefe einen Nullpunkt aufweist. Die Drücke nehmen linear mit der Entfernung vom Nullpunkt zu und sind oben von der leichten zur schweren Flüssigkeit gerichtet, unten dagegen umgekehrt. Wird die Trennwand plötzlich entfernt, dann dreht sich die Trennfläche um die Mittelachse, die Geschwindigkeitsverteilung ist linear mit Maximalwerten an Sohle und Oberfläche.

Aus dem Impulsstrom

$$\dot{I} = \rho \cdot \dot{V} \cdot v = \rho \cdot v^2 \cdot b \cdot h = (\rho - \Delta\rho) \cdot b \cdot \int (v(z))^2 \cdot dz$$

ergibt sich mit der Geschwindigkeitsverteilung für den Bereich oberhalb der Drehachse in der leichteren Flüssigkeit

$$v(z) = z \cdot \frac{v_{\max}}{0,5 \cdot h_2}$$

$$\dot{I} = (\rho - \Delta\rho) \cdot b \cdot \frac{1}{6} \cdot v_{\max}^2 \cdot h_2$$

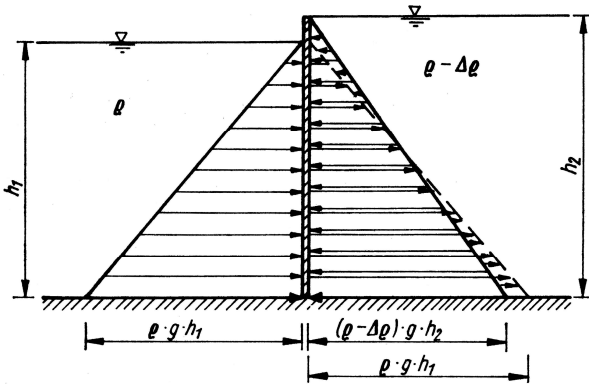


Bild 3.1

Druckverhältnisse an einer beweglichen Trennwand zwischen Flüssigkeiten unterschiedlicher Dichte

Die Druckkraft, die den Impulsstrom verursacht, ergibt sich aus der Druckverteilung zu

$$F = 0,5 \cdot (0,5 \cdot h_2 \cdot \frac{\Delta\rho}{\rho}) \cdot (0,5 \cdot h) \cdot (\rho - \Delta\rho) \cdot b \cdot g$$

Aus der Gleichsetzung von Druckkraft und Impulsfluss erhält man damit

$$v_{\max} = 0,866 \cdot \sqrt{g \cdot \frac{\Delta\rho}{\rho} \cdot h_2} \quad (3.7)$$

d. h., die maximale Ausbreitungsgeschwindigkeit entspricht, eingesetzt in Gl. (3.5), einer reduzierten Froudezahl von $Fr_{\Delta} = 0,866$. Dieser Zahlenwert wurde experimen-

tell überprüft und bestätigt ((*Kranawettreiser*, 1974), (*Jia-hua*, 1960), (*Averkiew & Kind*, 1965), (*Widomski*, 1970)) durch Bestimmung der Tiefe am Tauchpunkt, an dem der kalte Zufluss zu einem geschichteten See oder in einem Fluss unter das warme Oberflächenwasser abtaucht.

Für die ursprüngliche Fragestellung ergibt sich, dass sich warmes Wasser dann stromauf ausbreiten kann, wenn die reduzierte *Froudezahl* an der Einleitungsstelle kleiner als 0,866 ist (Beispiel s. Abschn. 3.3.3.).

Existiert nun in einer Tiefe h unter dem Wasserspiegel ein Dichtegradient dp/dh , dann wandelt sich der Ausdruck für die maximal mögliche Ausbreitungsgeschwindigkeit um in

$$v_{\max} = 0,866 \cdot h \cdot \sqrt{\frac{g \cdot dp}{\rho \cdot dh}} \quad (3.7a)$$

Geschwindigkeiten, welche dieser Bedingung entsprechen (bis zu einem Wert von 1 m/s!), wurden bei den Untersuchungen an der TS Bleiloch (Temperaturschichtung) gemessen. Sie sind in jedem geschichteten Gewässer nachweisbar und bilden die Grundlage für den Aufbau und die Stabilität der Sprungschicht (Metalimnion).

3.2.3 Reibung an der Schichtgrenze

Die Schichtgrenze innerhalb einer geschichteten Flüssigkeit begrenzt das Strömungsfeld ähnlich wie eine feste Berandung. Im Gegensatz zu letzterer muss die Geschwindigkeit jedoch nicht den Wert null annehmen. In der benachbarten Schicht kann eine Geschwindigkeit im Bereich der Schichtgrenze (verbunden mit einer Zirkulationsströmung) induziert werden, oder beide Schichten strömen in gleiche oder entgegengesetzte Richtungen. Analog zur Schubspannung an der Sohle (s. Bd. 1, Gl. (5.3))

$$\tau_0 = \frac{\lambda}{8} \cdot \rho \cdot v^2 \quad (3.8)$$

kann man die Schubspannung an der Schichtgrenze

$$\tau_{i1,2} = \frac{\lambda_{i1,2}}{8} \cdot \rho_{1,2} \cdot (v_1 \cdot v_2)^2 \quad (3.9)$$

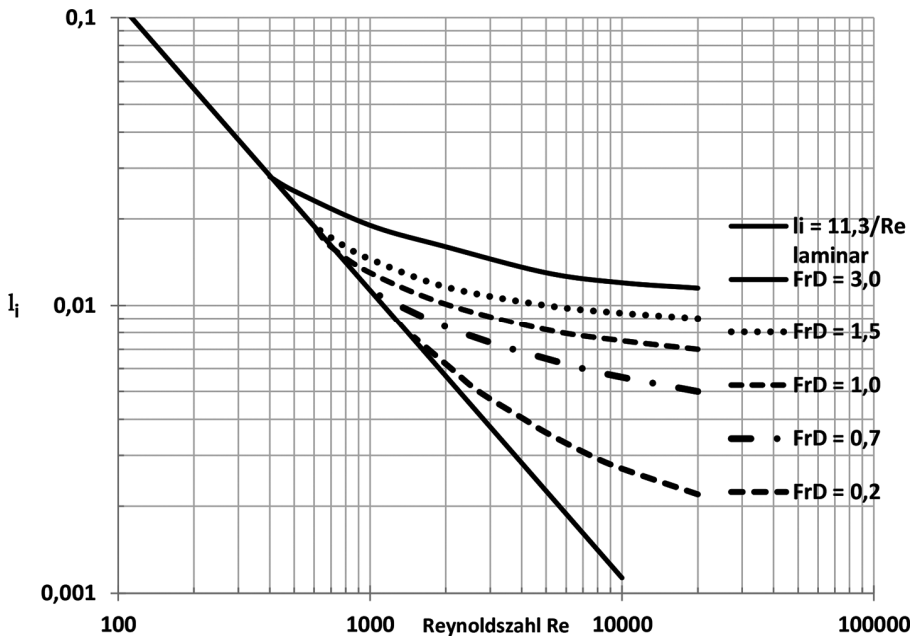
bilden, wobei sich die Indizes auf die Schichten beziehen.

Der Reibungsbeiwert der internen Reibung ergibt sich bei laminarer Strömung nach (*Bolschakow*, 1977) zu

$$\lambda_i = \frac{11,3}{Re} \quad (3.10)$$

Für die turbulente Strömung erhält man aus *Bolschakow* (1977)

$$\lambda_i = \frac{0,3}{Re^{0,5}} \quad (3.11)$$

**Bild 3.2**

Reibungsbeiwert λ_i an der Schichtgrenze als Funktion der *Reynoldszahl* Re und der reduzierten *Froudezahl* Fr_D

als minimalen Reibungsbeiwert in Abhängigkeit von der *Reynoldszahl* bei reduzierten *Froudezahlen*, die kleiner als 0,2 sind. Dieser Wert ist vergleichbar mit dem Reibungsbeiwert für hydraulisch glatte Rohrleitungen nach Blasius (s. Bd. 1, Gl. (5.19))

$$\lambda = \frac{0,3164}{Re^{0,25}}$$

und zeigt, dass die Reibung an der Schichtgrenze bedeutend geringer ist als an einer hydraulisch glatten Wand.

Bild 3.2 zeigt eine dem *Moody-Diagramm* (Bd. 1, Bild 5.16) ähnliche Darstellung, nur dass die Rolle der relativen Rauigkeit von dem Quadrat der reduzierten *Froudezahl* übernommen worden ist. Das ist verständlich, wenn man davon ausgeht, dass die Amplituden der Grenzflächenwellen, welche die Reibung maßgeblich bestimmen, der *Froudezahl* proportional sind.

3.3 Eintrittsströmung und Durchströmung

3.3.1 Bewegungsgleichungen für geschichtete Strömungen

Es wird ein Ausschnitt aus der Strömung mit der Breite 1 und der differentiellen Länge δx betrachtet, d. h. das ebene Problem bzw. der Rechteckquerschnitt.

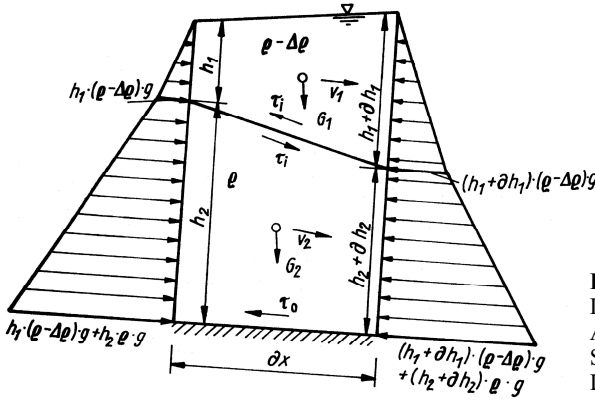


Bild 3.3

Definitionsskizze für einen Abschnitt der geschichteten Strömung mit der differentiellen Länge ∂x

Für jede der beiden Schichten muss dann das *Newtonsche Axiom*

$$\vec{F} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

erfüllt sein. Die Kraft \vec{F} setzt sich dabei aus den hydrostatischen Druckkräften, den Reibungskräften sowie der parallel zur Sohle der betreffenden Schicht gerichteten Hangabtriebskraft zusammen. Mit den Bezeichnungen aus Bild 3.3. sowie den Schubspannungsansätzen

$$\tau_0 = \frac{\lambda}{8} \cdot \rho_2 \cdot v_2 \cdot |v_2|$$

$$\tau_{i1,2} = \frac{\lambda_{i1,2}}{8} \cdot \rho_{1,2} \cdot (v_1 - v_2) \cdot |v_1 - v_2|$$

ergibt sich das Gleichungssystem für den instationären Zustand nach *Kranawetterreiser* (1973) mit den beiden Bewegungsgleichungen (3.12) und (3.13) sowie den beiden Kontinuitätsgleichungen (3.14) und (3.15). Die Indizes der Schubspannung (1, 2) weisen darauf hin, dass die Berechnung jeweils mit zusammengehörigen Werten der Dichte und des Reibungsbeiwertes an der Schichtgrenze erfolgen muss. Die Größen q_1 und q_2 stellen die auf die Breitereinheit bezogenen spezifischen Abflüsse in den beiden Schichten dar.

$$S - \frac{\delta h_1}{\delta x} - \frac{\delta h_2}{\delta x} - \frac{\lambda_i}{8 \cdot g \cdot h_1} (v_1 - v_2) \cdot |v_1 - v_2| - \frac{1}{2g} \cdot \frac{\delta v_1^2}{\delta x} - \frac{1}{g} \cdot \frac{\delta v_1}{\delta t} = 0 \quad (3.12)$$

$$S - \left(1 - \frac{\Delta \rho}{\rho}\right) \cdot \frac{\delta h_1}{\delta x} - \frac{\delta h_2}{\delta x} - \frac{\lambda}{8 \cdot g \cdot h_2} \cdot v_2 \cdot |v_2| + \frac{\lambda_i}{8 \cdot g \cdot h_2} \cdot (v_1 - v_2) \cdot |v_1 - v_2| - \frac{1}{2g} \cdot \frac{\delta v_2^2}{\delta x} - \frac{1}{g} \cdot \frac{\delta v_2}{\delta t} = 0 \quad (3.13)$$

$$\frac{\delta q_1}{\delta x} + \frac{\delta h_1}{\delta t} = 0 \quad (3.14)$$

$$\frac{\delta q_2}{\delta x} + \frac{\delta h_2}{\delta t} = 0 \quad (3.15)$$

Dieses Gleichungssystem für den instationären Zustand muss z. B. gelöst werden, wenn an der Mündung eines Flusses ins Meer (Überschichtung von Süßwasser über Salzwasser) infolge des Gezeiteneinflusses zeitabhängige Wasserstände und Geschwindigkeiten berücksichtigt werden müssen. Für den stationären Fall mit $\delta v / \delta t = 0$ vereinfacht sich das Gleichungssystem zu

$$S - \frac{dh_1}{dx} - \frac{dh_2}{dx} - \frac{\lambda_i}{8 \cdot g \cdot h_1} (v_1 - v_2) \cdot |v_1 - v_2| - \frac{1}{2g} \cdot \frac{dv_1^2}{dx} = 0 \quad (3.16)$$

$$S - \left(1 - \frac{\Delta \rho}{\rho}\right) \cdot \frac{dh_1}{dx} - \frac{dh_2}{dx} - \frac{\lambda}{8 \cdot g \cdot h_2} \cdot v_2 \cdot |v_2| + \frac{\lambda_i}{8 \cdot g \cdot h_2} \cdot (v_1 - v_2) \cdot |v_1 - v_2| - \frac{1}{2g} \cdot \frac{dv_2^2}{dx} = 0 \quad (3.17)$$

$$q_1 = v_1 \cdot h_1 \quad (3.18)$$

$$q_2 = v_2 \cdot h_2 \quad (3.19)$$

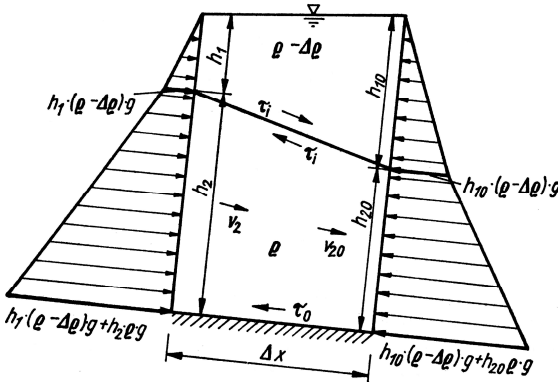
Dieses System simultaner Differentialgleichungen mit der unabhängigen Variablen x und den abhängigen Variablen h_1 und h_2 ist nicht geschlossen lösbar. Für den Fall einer ruhenden leichten Schicht über einer bewegten schweren (z. B. Zufluss von kaltem Flusswasser zu einem geschichteten See oder Abfluss stromauf der Kühlwasser-einleitung in einem Fluss) kann die Geschwindigkeit in der oberen Schicht $v_1 = 0$ gesetzt werden. Mit dieser Vereinfachung und dem Übergang von differentiellen Größen zu endlichen Differenzen kann das Gleichungssystem iterativ gelöst werden. Dazu müssen an einer Stelle x_0 die beiden Schichtdicken h_{10} und h_{20} bekannt sein. Mit den Bezeichnungen nach Bild 3.4 und den Transformationen

$$dh_1 \rightarrow h_{10} - h_1 \quad q_1 = 0$$

$$dh_2 \rightarrow h_{20} - h_2 \quad q_2 = q$$

$$h_1 \rightarrow \frac{h_{10} + h_1}{2}$$

$$h_2 \rightarrow \frac{h_{20} + h_2}{2}$$

**Bild 3.4**

Definitionsskizze für einen Abschnitt der geschichteten Flüssigkeit mit der endlichen Länge Δx

erhält man

$$\Delta x = \frac{h_{10} + h_{20} - h_1 - h_2}{S + \frac{\lambda_i \cdot q^2}{g \cdot (h_1 + h_{10}) \cdot (h_2 + h_{20})^2}} \quad (3.20)$$

$$\Delta x = \frac{h_{10} + h_{20} - h_1 - h_2 - \frac{\Delta \rho}{\rho} (h_{10} - h_1) + \frac{q^2}{2g} \cdot \left(\frac{1}{h_{20}^2} - \frac{1}{h_2^2} \right)}{S + \frac{(\lambda + \lambda_i) \cdot q^2}{g \cdot (h_2 + h_{20})^3}} \quad (3.21)$$

Die Entfernung zwischen den beiden Schnitten mit den bekannten Schichtdicken h_{10} und h_{20} bzw. den zu berechnenden Schichtdicken h_1 und h_2 beträgt Δx . Da zwei Gleichungen und drei Unbekannte vorliegen, kann eine der Größen h_1 und h_2 vorgegeben werden, während die andere so lange iterativ verändert werden muss, bis die beiden Gleichungen (3.20) und (3.21) den gleichen Wert für Δx ergeben. Es handelt sich um Differenzen von annähernd gleichen Größen, weshalb mindestens noch die 3. Stelle nach dem Komma mitgeführt werden muss, auch wenn das bezüglich der erreichbaren Messgenauigkeit der Tiefen nicht sinnvoll erscheint (Beispiel s. Abschn. 3.3.3).

Der vorgestellte Lösungsalgorithmus stimmt mit dem Vorgehen bei der Berechnung von Stau- und Senkungslinien in ungeschichteten Flüssigkeiten überein, nur müssen hier die Stau- bzw. Senkungslinien für die beiden übereinanderliegenden Schichten unter Beachtung ihrer gegenseitigen Beeinflussung ermittelt werden.

Die Gleichungen gelten für den stationär-ungleichförmigen Zustand. Nach einer genügend langen Fließstrecke wird sich jedoch stets der stationär-gleichförmige Zustand mit $h_2 = h_{20}$ einstellen. Wird diese Bedingung in die Gleichungen (3.20) und (3.21) eingeführt, erhält man eine Bestimmungsgleichung für die Normalabflusstiefe h_2 der unteren Schicht, bei der Gerinnesohle, Schichtgrenze und Energielinie parallel

verlaufen:

$$h_2^3 - h_2 \cdot \left(1 - \frac{\Delta\rho}{\rho}\right) \cdot \frac{\lambda_i \cdot q^2}{4 \cdot g \cdot (h_1 + h_{10}) \cdot S \cdot \frac{\Delta\rho}{\rho}} - \frac{(\lambda + \lambda_i) \cdot q^2}{8 \cdot g \cdot S \cdot \frac{\Delta\rho}{\rho}} = 0 \quad (3.22)$$

Falls $\lambda_i \approx 0$ gesetzt werden kann, ergibt sich eine wesentliche Vereinfachung:

$$h_2 = \left(\frac{\lambda \cdot q^2}{8 \cdot g \cdot S \cdot \frac{\Delta\rho}{\rho}} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.23)$$

Aus der Bedingung $Fr_\Delta = 1$ erhält man die kritische Tiefe zu

$$h_{2,kr} = \left(\frac{q^2}{g \cdot \frac{\Delta\rho}{\rho}} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.24)$$

womit sich ergibt

$$h_2 = h_{2,kr} \left(\frac{\lambda}{8 \cdot S} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.25)$$

Daraus kann abgeleitet werden, dass strömender Normalabfluss in der unteren Schicht auftritt, wenn der Radikand größer als 1 oder $\lambda > 8 \cdot S$ ist.

Mit der Beziehung zwischen Reibungsbeiwert λ und Abflussbeiwert M nach *Manning*

$$\lambda = \frac{8 \cdot g}{M^2 \cdot h^{\frac{1}{3}}}$$

(abgeleitet aus $\frac{S}{v^2} = \frac{1}{M^2 \cdot R^{4/3}} = \frac{\lambda}{D} \cdot \frac{1}{2g}$ sowie $D = 4R$ und $R \approx h$) erhält man

$$h_2 = \left(\frac{q^2}{M^2 \cdot S \cdot \frac{\Delta\rho}{\rho}} \right)^{0,3} \quad (3.26)$$

als Normalabflusstiefe einer fließenden schwereren Schicht unter einer ruhenden leichteren bei vernachlässigbarer Reibung an der Schichtgrenze (Beispiel s. Abschnitt 3.3.3).

3.3.2 Eintritt kalten Flusswassers in eine Talsperre

Das eintretende kalte und damit schwerere Wasser ordnet sich entsprechend seiner Dichte in den Schichtenaufbau des Wasserkörpers ein und verringert dabei seine Geschwindigkeit auf $v_2 = 0$, wenn es nicht in einer Kurzschlussströmung mit Normalabflusstiefe durch die Talsperre hindurchströmt.

Im ersten Fall sind wegen der gegen null gehenden Geschwindigkeit die Schichtgrenzen waagrecht. Die kalte Strömung verläuft im ehemaligen Flussbett, dessen Sohle die untere Begrenzung der Schicht bildet. Die obere Schichtgrenze ergibt sich bei strömendem Abfluss als Staulinie entsprechend Bild 3.5a. Die Wassertiefe am Tauchpunkt T ist gleich der Normalabflusstiefe der unteren Schicht.

Bei schießendem Abfluss im ehemaligen Flussbett, wenn also der Reibungsbeiwert klein ist gegenüber dem Sohlgefälle, ergibt sich ein kompliziertes Bild. Ein kontinuierlicher Übergang vom schießenden Abfluss zur ruhenden Schicht ist nicht möglich. An dieser Stelle muss, wie es Bild 3.5b zeigt, ein Wechselsprung W in der kalten Schicht auftreten. Dieser Wechselsprung kann mit den üblichen Formeln berechnet werden, wenn statt der Erdbeschleunigung g eine „reduzierte Fallbeschleunigung“

$$g' = g \cdot \frac{\Delta \rho}{\rho} \quad (3.27)$$

eingeführt wird, wie das schon bei der reduzierten Froudezahl geschah.

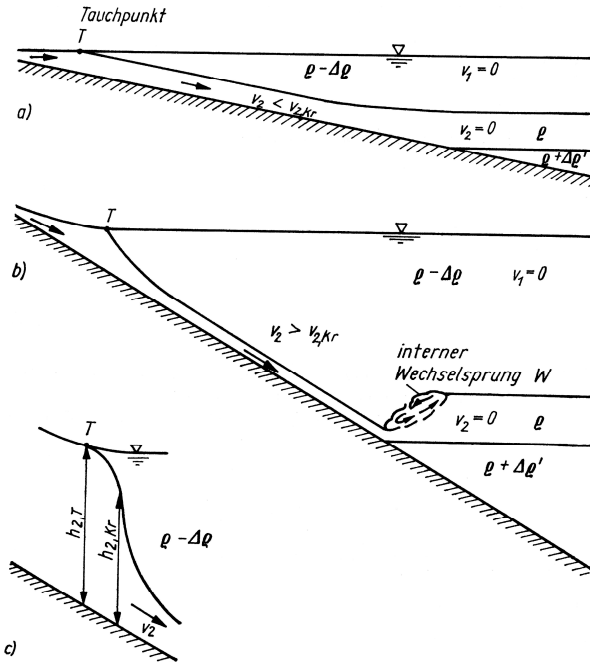


Bild 3.5

Verhältnisse beim Eintritt kalten Flusswassers in eine Talsperre

- strömender Normalabfluss in der unteren Schicht
- schießender Normalabfluss in der unteren Schicht
- Detail am Tauchpunkt T bei schießendem Normalabfluss in der unteren Schicht

Die obere Schichtgrenze muss analog zur Berechnung von Stau- und Senkungslinien (s. Bd. 1, Abschnitt 6.7.) wegen des schießenden Abflusses *in* Fließrichtung berechnet werden. Ausgangspunkt für die Berechnung kann nur die kritische Tiefe sein, weil ein Übergang bei der Berechnung vom schießenden zum strömenden Bereich wegen der unterschiedlichen Richtungen der Berechnung nicht möglich ist. Die Entfernung zwischen dem Tauchpunkt T und der Stelle, an der die kritische Tiefe auftritt, muss als strömender Abfluss *entgegengesetzt* zur Fließrichtung, ausgehend von der kritischen Tiefe, berechnet werden.

Die Tiefe am Tauchpunkt (s. Bild 3.5c) ergibt sich nach Abschnitt 3.2.2. aus der Bedingung

$$Fr_{\Delta,T} = 0,866 = \frac{v_T}{\sqrt{g \cdot \frac{\Delta\rho}{\rho} \cdot h_{2,T}}} = \frac{q}{h_{2,T} \sqrt{g \cdot \frac{\Delta\rho}{\rho} \cdot h_{2,T}}}$$

zu

$$h_{2,T} = \frac{1}{0,866^3} \cdot h_{2,kr} = 1,10 \cdot h_{2,kr} \quad (3.28)$$

und liegt damit sehr nahe an der kritischen Tiefe. Da bekanntlich der Wasserspiegel an der Stelle der kritischen Tiefe eine vertikale Tangente hat, was sich nicht ändert, wenn statt des Wasserspiegels bei der Dichteströmung die Schichtgrenze berechnet wird, kann die Entfernung zwischen Tauchpunkt und kritischer Tiefe in der unteren Schicht mit $\Delta x = 0$ angesetzt werden. Damit kann der Ausgangspunkt der Berechnung der Schichtgrenze bei schießendem Abfluss der unteren Schicht mit $h_{10} + h_{20} = h_{2,T}$ an der Stelle des Tauchpunktes und mit $h_2 = 0,9 \cdot h_{2,kr}$ in der Entfernung Δx festgelegt werden.

Die Verhältnisse beim Durchströmen der Talsperre sind einfach zu erfassen, da entweder die Normalabflusstiefe bis zum Grundablass beibehalten wird (wenn eine Kurzschlussströmung auftritt) oder der Zufluss sich einschichtet und die Entnahme aus einer anderen als ruhend zu betrachtenden Schicht erfolgt.

Beispiel 3.1

Im Zufluss zu einer Talsperre tritt infolge einer Havarie ein Feststoffgehalt von 2000 mg/l Eisen-(III)-oxyd bei einer Temperatur von 12 °C auf. Der Durchfluss beträgt 1,1 m³/s, die Flussbreite 4 m. Das Sohlgefälle von 6,7 ‰ setzt sich, ebenso wie die Flussbreite, an der Talsperrensohle fort. Die Temperatur in der Talsperre beträgt 4 °C.

Die Normalabflusstiefe vor der Talsperre ergibt sich nach Gl. (3.26) zu

$$h \approx \left(\frac{(\dot{V}/b)^2}{M^2 \cdot S} \right)^{0,3} = \left(\frac{1,1^2/4^2}{15^2 \cdot 0,0067} \right)^{0,3} = 0,41 \text{ m}$$

bei einem *Manning*beiwert $M = 15 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$ für extrem raues Flussbett. Die Dichte des Talsperrenwassers ergibt sich aus der Temperatur zu $\rho_{TS} = 999,973 \text{ kg/m}^3$, die Dich-

te des Zuflusswassers zu $\rho_Z' = 999,50 \text{ kg/m}^3$. In 1 m^3 des Zuflusswassers sind 2 kg Feststoff mit einer Reindichte $\rho_F = 3600 \text{ kg/m}^3$ enthalten. Sie nehmen damit ein Volumen von

$$V_F = \frac{2,0 \text{ kg}}{3600 \text{ kg/m}^3} = 5,55 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$

ein. Die Gesamtmasse für 1 m^3 ergibt sich damit wie folgt:

$$m = V_F \cdot \rho_F + V_Z' \cdot \rho_Z' \\ = 5,55 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \cdot 3600 \text{ kg/m}^3 + 0,999444 \text{ m}^3 \cdot 999,5 \text{ kg/m}^3 = 1000,944 \text{ kg}$$

woraus die Dichte des zufließenden Wasser-Feststoff-Gemischs $\rho_Z = 1000,944 \text{ kg/m}^3$ sowie die Dichtedifferenz $\Delta\rho = 0,971 \text{ kg/m}^3$ und die relative Dichtedifferenz $\frac{\Delta\rho}{\rho} = 0,000971$ berechnet werden können. Die Tiefe am Tauchpunkt T ergibt sich zu

$$h_{2,T} = 1,1 \cdot \sqrt[3]{\frac{\dot{V}^2}{g \cdot \Delta\rho / \rho \cdot b^2}} = 1,1 \cdot \sqrt[3]{\frac{1,1^2}{9,81 \cdot 0,000971 \cdot 4^2}} = 2,19 \text{ m}$$

und die zugehörige Geschwindigkeit

$$v_{\max} = 0,866 \cdot \sqrt{g \cdot \frac{\Delta\rho}{\rho} \cdot h_{2,T}} = 0,866 \cdot \sqrt{9,81 \cdot 0,000971 \cdot 2,19} = 0,125 \text{ m/s}$$

Eine weitere Verringerung der Geschwindigkeit ist nicht möglich; das schwerere Zuflusswasser taucht ab und fließt im ehemaligen Flussbett mit der Normalabflusstiefe

$$h_2 = \left(\frac{(\dot{V}/b)^2}{M^2 \cdot S \cdot \frac{\Delta\rho}{\rho}} \right)^{0,3} = \left(\frac{(1,1/4)^2}{80^2 \cdot 0,0067 \cdot 0,000971} \right)^{0,3} = 1,196 \text{ m}$$

und der Geschwindigkeit $v_2 = \dot{V} / (b \cdot h_2) = 1,1 / (4 \cdot 1,196) = 0,23 \text{ m/s}$.

Die erhebliche Erhöhung des Abflussbeiwertes in der Sperre kann deshalb angenommen werden, weil die Rauigkeitserhebungen durch Sedimentation abgedeckt sind. Das schwere Zuflusswasser schichtet sich unten in der Talsperre ein und bildet dabei einen ruhenden Wasserkörper. Weil der Normalabfluss schießend erfolgt

$$Fr_\Delta = \frac{v_2}{\sqrt{g \cdot \frac{\Delta\rho}{\rho} \cdot h_2}} = \frac{0,23}{\sqrt{9,81 \cdot 0,000971 \cdot 1,196}} = 2,155 > 1$$

kann der Übergang zu diesem ruhenden Körper nur in Form eines Wechselsprungs erfolgen:

$$h_2' = \frac{h_2}{2} \cdot \left(\sqrt{1 + 8 \cdot Fr_\Delta^2} - 1 \right) = \frac{1,196}{2} \cdot \left(\sqrt{1 + 8 \cdot 2,155^2} - 1 \right) = 3,095 \text{ m}$$

In diesem Wechselsprung (Bild 3.6) kann es wegen der hohen Turbulenz zu einer Aufwirbelung des Sediments und damit zu einer Freisetzung von Schadstoffen kommen. In dem Schadensfall, welcher dem Beispiel zugrunde liegt, wurde aus dem Sediment zweiwertiges Eisen (statt des zufließenden dreiwertigen) freigesetzt, was ein Fischsterben zur Folge hatte.

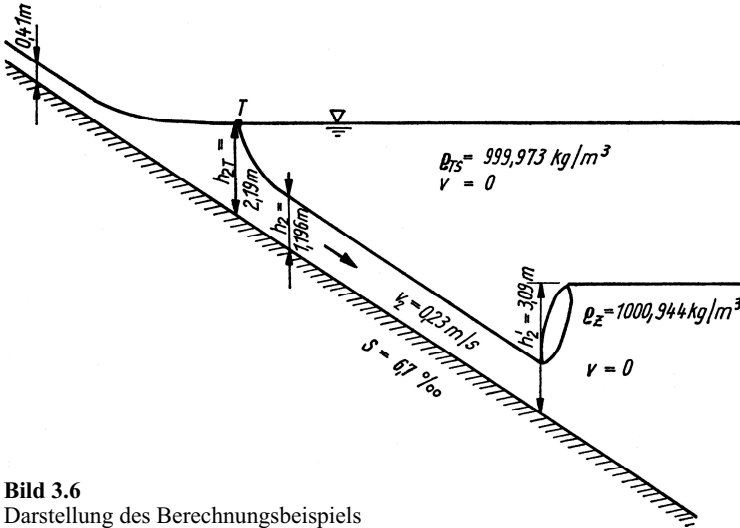


Bild 3.6
Darstellung des Berechnungsbeispiels

3.3.3 Dichteströmungen in einem Fließgewässer

In Fließgewässern treten Dichteströmungen nur in geringem Umfang auf. Das liegt in der Fließgeschwindigkeit begründet, die meist bedeutend größer ist als die Ausbreitungsgeschwindigkeit infolge der Dichtedifferenz.

Der wichtigste Fall ist die Mündung eines Stromes ins Meer. Das schwere Salzwasser schiebt sich als Zunge an der Sohle in den Stromlauf hinein. Da Reibung nur an der Schichtgrenze auftritt, wo der Reibungsbeiwert sehr gering ist (Sohleibung tritt wegen der ruhenden Salzwasserschicht nicht auf), stellt sich die Schichtgrenze nahezu waagrecht ein. An der Eintrittsstelle des Süßwassers ins Meer tritt in der oberen Schicht die kritische Tiefe auf. Die Berechnung kann erfolgen, wenn in das Gleichungssystem der stationär-ungleichförmigen Bewegung (Gleichungen (3.16) bis (3.19)) $v_2 = 0$ und $v_1 = v$ eingeführt werden.

Eine weitere Möglichkeit für das Auftreten einer Dichteströmung ist gegeben, wenn ein beträchtlicher Anteil des Flusswassers als Kühlwasser entnommen und nach Erwärmung wieder eingeleitet wird. Im Bereich zwischen Entnahme und Wiedereinleitung des Kühlwassers fließt dann nur der Restabfluss mit bedeutend geringerer Geschwindigkeit, so dass sich das erwärmte Wasser stromauf ausbreiten kann und evtl. in die Entnahme gelangt. Das führt zu einer bedeutenden Verringerung der Kühlwirkung und muss deshalb verhindert werden.

Die Berechnung erfolgt als fließende kalte Schicht unter ruhender warmer mit den Gleichungen (3.20) und (3.21). Ausgangspunkt ist die Tiefe des kalten Wassers an

der Einleitungsstelle. Sie ergibt sich aus dem Anteil des Restabflusses am Gesamtabfluss. Ist diese Tiefe geringer als die kritische für die betreffenden Dichte- und Abflussverhältnisse, dann ist letztere als Anfangstiefe einzuführen. Die Gesamttiefe an der Einleitungsstelle ist gleich der Normalabflusstiefe des Gesamtabflusses.

Beispiel 3.2

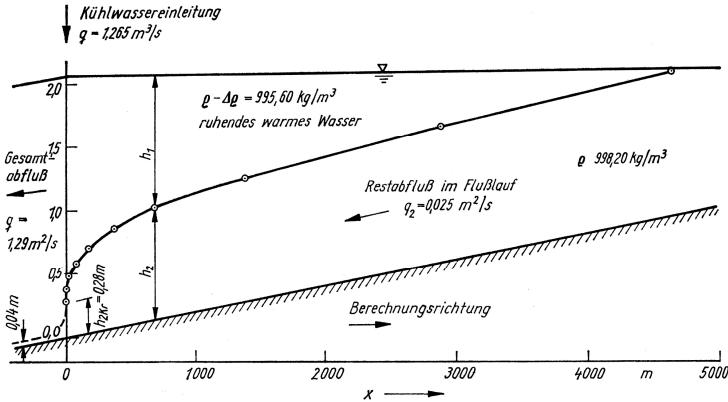


Bild 3.7

Darstellung des Berechnungsbeispiels 3.2

Für den vorstehenden Fall ergibt sich die Schichtgrenze wie folgt:

Gesamtdurchfluss	$q = 1,29 \text{ m}^2/\text{s}$
Sohlgefälle	$S = 0,0002$
Manningbeiwert	$M = 27,2 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$
Gesamttiefe	$h = 2,07 \text{ m} = h_{10} + h_{20}$
Temperatur des Flusswassers	$T = 20 \text{ °C} \Rightarrow \rho = 998,20 \text{ kg/m}^3$
Temperatur des Kühlwassers	$T = 30 \text{ °C} \Rightarrow \rho = 995,60 \text{ kg/m}^3$
Restabfluss zwischen Entnahme und Einleitung	$q_2 = 0,025 \text{ m}^2/\text{s}$

Die reduzierte Froudezahl, gebildet mit der Gesamttiefe und der relativen Dichtedifferenz $\Delta\rho/\rho = 0,0026$, ergibt sich zu

$$Fr_\Delta = \frac{q_2}{h \cdot \sqrt{g \cdot \frac{\Delta\rho}{\rho} \cdot h}} = 0,0525$$

und ist damit bedeutend kleiner als $Fr_\Delta = 0,866$, so dass mit Sicherheit eine Dichteströmung auftreten wird. Die Tiefe der unteren Schicht an der Einleitungsstelle ergibt sich aus dem Kontinuitätsgesetz zu $h_{20} = 0,04 \text{ m}$, was bedeutend geringer ist als die kritische Tiefe

$$h_{2,kr} = \left(\frac{0,025^2}{9,81 \cdot 0,0026} \right)^{\frac{1}{3}} = 0,28 \text{ m},$$

weshalb letztere in die Berechnung als Ausgangswert eingeführt werden muss. Der Reibungsbeiwert an der Sohle ergibt sich aus $h = 2,07$ m und $M = 27,2 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$ zu $\lambda = 0,083$ und wird für die gesamte Berechnung als konstant angenommen. Die Reynoldszahl der unteren Schicht ergibt sich zu

$$\text{Re} = \frac{v_4 \cdot 4 \cdot h_2}{\nu} = \frac{4q_2}{\nu} = \frac{4 \cdot 0,025}{1,01 \cdot 10^{-6}} = 10^5,$$

wenn der hydraulische Radius mit der Schichthöhe gleichgesetzt wird. Daraus wird der Reibungsbeiwert der inneren Reibung zu $\lambda_i = 0,006$ abgeschätzt.

Die Anfangswerte für die Berechnung ergeben sich aus $h_{20} = h_{2,r} = 0,28$ m sowie $h_{20} + h_{10} = 2,07$ m zu $h_{10} = 1,79$ m. Für die untere Schicht wird eine Differenz der Schichtdicken von $0,1$ m vorgegeben, woraus $h_2 = 0,38$ m folgt. In den Gleichungen (3.20) und (3.21) sind nur noch die Größen Δx und h_1 unbekannt. Deshalb wird h_1 so lange verändert, bis beide Werte für Δx genügend genau übereinstimmen. Wird als erste Annahme $h_1 = 1,68$ m eingeführt, dann ergibt sich mit Werten von $50,0$ m und $54,8$ m für Δx noch keine Übereinstimmung. Erst mit $h_1 = 1,6892$ m erhält man aus beiden Gleichungen übereinstimmend $\Delta x = 4,0$ m. Die Schichtdicke der unteren Schicht nimmt also bereits in 4 m Entfernung von der Einleitungsstelle um 10 cm zu. Die weiteren Ergebnisse der Berechnung der Schichtgrenze und des Wasserspiegels sind in Tafel 3.1 aufgeführt und in Bild 3.7 dargestellt. Eine Berechnung für kleinere Werte von h_1 als 2 bis 5 cm ist nicht sinnvoll.

Die Normalabflusstiefe für die untere Schicht ergibt sich nach Gl. (3.26) zu

$$h_2 = \left(\frac{0,025^2}{27,2^2 \cdot 0,0002 \cdot 0,0026} \right)^{0,3} = 1,15 \text{ m},$$

was mit den letzten berechneten Werten in Tafel 3.1 relativ gut übereinstimmt. Der Wasserspiegel der Warmwasserschicht kann genügend genau als waagerecht angesehen werden.

Tafel 3.1 Ergebnisse des Berechnungsbeispiels 3.2 in m

Höhe der oberen Schicht h_1	Höhe der unteren Schicht h_2	Intervalllänge Δx	Entfernung von Einleitung x	Sohlhöhe $S \cdot x$
1,79	0,28		0	—
1,69	0,38	4	4	—
1,59	0,48	21	25	0,005
1,48	0,58	50	75	0,015
1,36	0,68	100	175	0,035
1,22	0,78	200	375	0,075
1,06	0,88	300	675	0,135
0,82	0,98	700	1375	0,275
0,42	1,08	1500	2875	0,575
0,02	1,13	1750	4625	0,925

Sollte die Entfernung zwischen Entnahme und Einleitung des Kühlwassers geringer als 4,6 km sein, dann gelangt erwärmtes Wasser in den Kühlkreislauf. Die Berechnung müsste dann mit einer von Null verschiedenen Geschwindigkeit in der oberen Schicht wiederholt werden.

3.4 Entnahmeströmungen

Bei der Entnahme aus einem geschichteten Medium ist die Frage zu beantworten, ob bei gegebener Anordnung und Größe der Entnahme nur Flüssigkeit aus *einer* Schicht abgezogen wird oder ob die Entnahmeströmung beide Schichten erfasst. Ist die Schichtung nicht diskontinuierlich mit einem Dichtesprung, wie er bisher immer vorausgesetzt wurde, sondern kontinuierlich, so interessiert die Frage, welcher Bereich der Schichtung in Bewegung versetzt wird.

3.4.1 Selektive Entnahme aus einer diskontinuierlich geschichteten Flüssigkeit

In der unteren Schicht eines Zweischichtensystems mit freiem Wasserspiegel befinde sich eine Entnahmeöffnung, durch die Flüssigkeit abgezogen wird. Liegt die Entnahmeöffnung sehr nahe an der Schichtgrenze, dann bildet sich wegen der großen Geschwindigkeiten in unmittelbarer Umgebung der Öffnung ein Absenkungstrichter in der oberen Schicht aus, die Schichtgrenze über der Öffnung wird sehr stark deformiert. Falls der Durchfluss bei sonst gleichen Bedingungen gesteigert wird, senkt sich die Schichtgrenze immer weiter ab, bis bei einem kritischen Durchfluss schließlich Flüssigkeit aus der oberen Schicht in die Entnahmeöffnung gelangt. In vielen Fällen – Entnahme von kaltem Tiefenwasser aus einer Talsperre zur Trinkwasseraufbereitung, Entnahme von kaltem Wasser aus den tiefen Schichten eines Kühlteichs, aber auch Entnahme von hypolimnischem Wasser bei der Tiefenwasserableitung zur Sanierung von Seen und Talsperren – muss die Sicherheit vorhanden sein, dass tatsächlich nur aus einer Schicht entnommen werden kann. Die Aufgabe besteht also darin, den Durchfluss zu ermitteln, bei welchem eine geringe Durchflussänderung zu einer sehr starken Deformation der Schichtgrenze führt. Dazu wird mit den Bezeichnungen des Bildes 3.8 die *Bernoulli*-Gleichung zwischen den Schnitten A (in der Achse der Entnahme) und E (in so großer Entfernung, dass die Geschwindigkeit zu null angenommen werden kann) angesetzt. Mit den Drücken p_A und p_E an der Schichtgrenze (d. h. in den Höhen h_A und h_E über der Entnahmeöffnung) infolge der überlagernden leichteren Schicht ergeben sich die Gleichungen

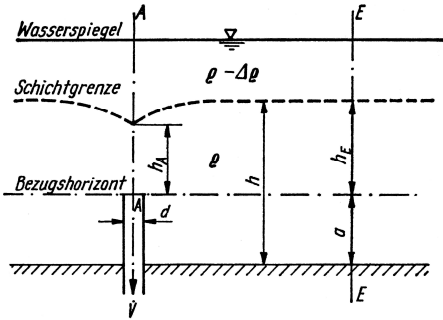
$$p_A + (\rho - \Delta\rho) \cdot g \cdot h_A = p_E + (\rho - \Delta\rho) \cdot g \cdot h_E$$

für die ruhende obere Schicht und

$$p_A + \rho \cdot \frac{v_A^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h_A = p_E + \rho \cdot g \cdot h_E$$

für die bewegte untere Schicht. Durch Elimination von $p_A - p_E$ ergibt sich

$$\frac{v_A^2}{2g} = \frac{\Delta\rho}{\rho} \cdot (h_E - h_A)$$

**Bild 3.8**

Definitionsskizze für selektive Entnahme aus einer diskontinuierlich geschichteten Flüssigkeit

In unmittelbarer Umgebung der Entnahmeöffnung erfolgt die Zuströmung kugelsymmetrisch, so dass sich die Geschwindigkeit in der Entfernung r aus dem Durchfluss \dot{V} und der Oberfläche der Kugel mit dem Radius r ergibt. Unter Einführung eines experimentell zu ermittelnden Beiwertes K_1 erhält man die Geschwindigkeit an der Schichtgrenze in der Achse der Entnahme

$$v_A = \frac{\dot{V}}{4 \cdot \pi \cdot h_A^2 \cdot K_1}$$

Durch Einführen dieses Ausdruckes für die Geschwindigkeit in die *Bernoulli*-Gleichung erhält man eine Beziehung zwischen \dot{V} und h_A , aus der sich mit der Bedingung $dV/dh_A = 0$ die Gleichung für den kritischen Zustand ergibt:

$$\frac{v_{kr}}{\left(g \cdot \frac{\Delta \rho}{\rho} \cdot d\right)^{\frac{1}{2}}} = 6,48 \cdot K_1 \cdot \left(\frac{h_E}{d}\right)^{\frac{5}{2}}$$

mit d als dem Durchmesser der Entnahmeöffnung. Wird $6,48 \cdot K_1 = K$ gesetzt, so erhält man

$$\frac{v_{kr}}{\left(g \cdot \frac{\Delta \rho}{\rho} \cdot d\right)^{\frac{1}{2}}} = K \cdot \left(\frac{h_E}{d}\right)^{\frac{5}{2}} \quad (3.29)$$

mit

$$K = 2,0 \quad 0 < \frac{a}{h} < 0,51$$

$$K = 6,9 \cdot \frac{a}{h} - 1,51 \quad 0,51 < \frac{a}{h} < 1,0 \quad (3.30)$$

Diese Beiwerte wurden in *Kranawettreiser* (1974) experimentell ermittelt.

Falls die Entnahmeöffnung senkrecht angeordnet ist, stellt h_E die Entfernung des Schwerpunktes der Öffnung von der Schichtgrenze dar. Bei nicht kreisförmigen Öffnungen ist für d der Durchmesser des flächengleichen Kreises einzusetzen.

Die Geschwindigkeit im Einlauf mit dem Durchmesser d muss kleiner sein als die nach Gleichung (3.29) berechnete kritische Geschwindigkeit, sonst wird Flüssigkeit aus der oberen Schicht mit abgezogen (die Gleichungen (3.29) und (3.30) gelten auch für Entnahme aus der oberen Schicht). Ist $v > v_{kr}$ und kann h_E nicht vergrößert werden, dann muss dem Einlauf ein Konfusor vorgeschaltet werden, der einen genügend großen Eintrittsdurchmesser aufweist.

Die Gleichung (3.29) kann nicht verwendet werden, um die erforderliche Überdeckungshöhe zur Vermeidung des Luftansaugens (z.B. bei Pumpen) zu berechnen, weil in diesem Fall die Trombenbildung infolge von Rotation eine entscheidende Rolle spielt, die Gleichung (3.29) diesen Fall aber nicht berücksichtigt.

Beispiel 3.3

Aus einem See mit einer Temperatur des Epilimnion (Oberflächenschicht) von 20°C ($\Rightarrow \rho = 998,2 \text{ kg/m}^3$) und einer Temperatur des Hypolimnions (Tiefenschicht) von 5°C ($\Rightarrow \rho = 1000 \text{ kg/m}^3$) soll über eine Leitung DN 400 der mittlere Abfluss von $\dot{V} = 0,2 \text{ m}^3/\text{s}$ aus dem Hypolimnion abgegeben werden, um den Nährstoffgehalt zu verringern. Welche Tiefenlage unter einer Sprungschicht (Metalimnion), die bei 20 m Tiefe liegt, muss die Entnahmeöffnung mindestens haben, damit kein nährstoffarmes epilimnisches Wasser mit abgezogen wird? Die kritische Geschwindigkeit v_{kr} wird mit der Geschwindigkeit v in der Rohrleitung mit $d = 0,4 \text{ m}$ gleichgesetzt:

$$v = v_{kr} = \frac{0,2 \text{ m}^3/\text{s}}{(0,4 \text{ m})^2 \cdot \frac{\pi}{4}} = 1,59 \text{ m/s}$$

Wird dieser Zahlenwert zusammen mit der relativen Dichtedifferenz $\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{1000 - 998,2}{1000} = 0,0018$ in Gl. (3.29) eingesetzt, wobei $K = 2$ angenommen wird

(ungünstigster Fall), dann folgt

$$\frac{1,59}{(9,81 \cdot 0,0018 \cdot 0,4)^{\frac{1}{2}}} = 2 \cdot \left(\frac{h_E}{0,4} \right)^{\frac{5}{2}},$$

Woraus $h_E = 0,98 \text{ m}$ als unbedingt einzuhaltender Abstand von der Entnahmeöffnung zur Sprungschicht ermittelt wird.

3.4.2 Selektive Entnahme aus einer kontinuierlich geschichteten Flüssigkeit

Eine Talsperre oder ein See ist durch die Angabe der Dichtedifferenz zwischen Epi- und Hypolimnion nur sehr unvollkommen in seiner thermischen Struktur charakterisiert. Das dabei auftretende Geschwindigkeitsprofil zeigt Bild 3.9. Falls die Entnahmeöffnung so ausgebildet und angeordnet ist, dass die Eintrittsgeschwindigkeit bedeutend kleiner als die zugehörige kritische Geschwindigkeit ist, bleibt die obere Schicht ohne Einfluss auf die Entnahme. Es müsste dann erwartet werden, dass die Zuströmung aus der gesamten unteren Schicht gleichmäßig erfolgt. Das ist jedoch

nicht der Fall, weil in der zunächst als homogen betrachteten Schicht immer ein Temperatur- und damit auch ein Dichtegradient vorhanden ist. Der Einfachheit halber kann mit genügender Genauigkeit eine lineare Zunahme der Dichte mit der Tiefe angesetzt werden.

Durch *Yih* (Debler, 1959) wurde der Fall theoretisch behandelt, dass in einem Kanal mit linearer Schichtung die Flüssigkeit am Kanalende an der Sohle entnommen wird. Mit Hilfe der Grenzschichttheorie ermittelte er, dass nur dann die gesamte Flüssigkeit mit der Dichtedifferenz $\Delta\rho$ zwischen Sohle und Wasserspiegel fließen kann, wenn gilt

$$Fr_{\Delta} = \frac{q}{h \cdot \left(g \cdot \frac{\Delta\rho}{\rho} \cdot h \right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{q}{h^2} \left(\frac{h}{g \cdot \frac{\Delta\rho}{\rho}} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pi} \quad (3.31)$$

Bei geringeren reduzierten *Froudezahlen* als $Fr_{\Delta} = 1/\pi \approx 0,32$ bildet sich eine trennende Stromlinie aus, oberhalb welcher die Flüssigkeit in Ruhe bleibt. Dieses Verhalten wurde von *Debler* (1959) experimentell bestätigt, der $Fr_{\Delta} = 0,28$ als Grenzwert ermittelte.

Aus der Überlegung, dass für die tatsächlich von der Bewegung erfasste Tiefe b des Wasserkörpers mit dem Dichtegradienten $\Delta\rho/h$ die Bedingung $Fr_{\Delta} = 1/\pi$ gelten muss, leitet *Debler* ab, dass

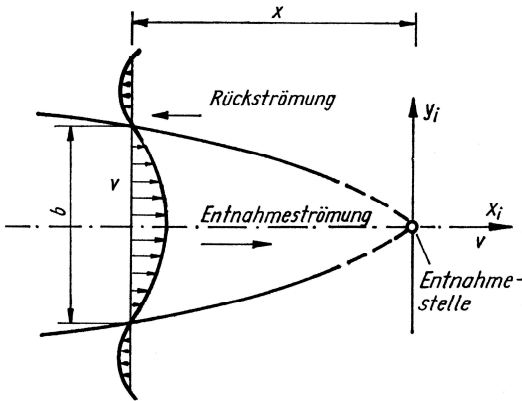
$$b = \left[q \cdot \pi \cdot \left(\frac{h}{g \cdot \frac{\Delta\rho}{\rho}} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.32)$$

wird, weil der Dichtegradient der Schicht erhalten bleibt. Auch diese Beziehung wurde experimentell überprüft. Damit ist eine einfache Formel zur Abschätzung der Höhe der fließenden Schicht bei Entnahme aus einer kontinuierlich geschichteten Flüssigkeit gegeben.

Aufgrund eines Ansatzes mit „ähnlichen Profilen“ der Geschwindigkeitsverteilung erhielten *Gelhar* und *Mascolo* (1966) die Beziehung

$$b = 6,84 \cdot \left(\frac{q \cdot v \cdot x}{g \cdot \frac{\Delta\rho}{\rho}} \right)^{0,25} \quad (3.33)$$

welche die Höhe der von der Entnahme betroffenen Schicht b in Abhängigkeit von der Entfernung x von der Entnahmestelle angibt. Die Größe $\Delta\rho$ ist dabei die Dichtedifferenz zwischen der oberen und der unteren Grenze der bewegten Schicht. Die Abhängigkeit für die Schichthöhe mit der vierten Wurzel aus der Entfernung von der Entnahme stimmt mit Versuchen gut überein.

**Bild 3.9**

Geschwindigkeitsprofil bei selektiver Entnahme aus einer kontinuierlich geschichteten Flüssigkeit

Beispiel 3.4

Aus dem Hypolimnion eines Sees soll punktförmig ein Abfluss von $0,2 \text{ m}^3/\text{s}$ als Tiefenwasserableitung zur Nährstoffeliminierung entnommen werden. Durch Messungen ist während der Sommerstagnation ein Temperaturabfall von 6°C auf 5°C auf einer Höhe von 20 m nachgewiesen worden. Welche Dicke erreicht die Entnahmeschicht in einer horizontalen Entfernung von maximal 20 m ?

Der Dichtegradient beträgt $\frac{0,05 \text{ kg/m}^3}{20 \text{ m}}$. Die Gleichungen (3.31) und (3.33) gelten

eigentlich nur für den ebenen Fall, deshalb muss als Breite der Kreisumfang bei 20 m Radius, also $125,7 \text{ m}$ eingeführt werden. Damit ergibt sich $q = 1,59 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$. Die reduzierte Froudezahl bei einer Hypolimniontiefe von $h = 20 \text{ m}$ beträgt nach Gl. (3.31)

$$\text{Fr}\Delta = \frac{0,00159}{20 \cdot (9,81 \cdot 0,00005 \cdot 20)^{0,5}} = 8 \cdot 10^{-4},$$

so dass nur ein geringer Teil des Hypolimnions von der Entnahmestromung erfasst wird. Mit Gl. (3.32) ergibt sich

$$b = \left[0,00159 \cdot 3,14 \cdot \left(\frac{20}{9,81 \cdot 0,00005 \cdot 20} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} = 1,0 \text{ m},$$

d. h. eine Schichtdicke in der Größenordnung von nur einem Meter. Mit Gl. (3.33) folgt

$$b = 6,84 \cdot \left(\frac{0,00159 \cdot 20 \cdot 1,4 \cdot 10^{-6}}{9,81 \cdot 0,00005} \right)^{0,25} = 0,67 \text{ m},$$

also die gleiche Größenordnung. Die Tiefenlage der Entnahme kann deshalb gut an die Schicht mit der höchsten Nährstoffkonzentration im Hypolimnion angepasst werden.

3.5 Einleitungen

Die punktförmige Einleitung in einen geschichteten Wasserkörper (Einleitung von gereinigtem Abwasser, Zugabe von Stoffen zur Wasserbehandlung) ist stets mit der Ausbildung eines Strahls in der direkten Umgebung der Einleitung sowie der Umwandlung des Strahls in eine Schichtströmung in größerer Entfernung verbunden.

Der Strahl (s. Kapitel 5) ist, infolge seines vorherrschenden Impulses, immer mit einer gerichteten Bewegung sowie mit einer Einmischung von Flüssigkeit aus der Umgebung verbunden. Dazu gehört in einer geschichteten Umgebung auch eine kontinuierliche Dichteänderung. Diese führt zu einer Dichteänderung entlang der Strahlachse und damit zu einem Verbiegen derselben (s. Gleichung (5.109)). Der Strahl steigt entweder bis zum Wasserspiegel auf oder sinkt bis zur Sohle ab, oder er schichtet sich dort ein, wo der Wasserkörper die gleiche Umgebungsdichte hat, wie sie der Strahl durch die Einmischung erreicht hat.

Wird dem Strahl eine Anfangskonzentration c_0 eines Stoffes beigemischt, dann lässt sich die Konzentration nach einer beliebigen Lauflänge L einfach aus dem Anfangsdurchfluss Q_0 und dem Gesamtdurchfluss $Q(L)$ berechnen. Diese Berechnung sagt aber noch nichts darüber aus, ob der Stoff bei der nach der Lauflänge L erreichten geringen Strahlgeschwindigkeit überhaupt noch im Strahl transportiert werden kann oder nicht einfach ausfällt, weil die Sinkgeschwindigkeit wesentlich größer als die Strahlgeschwindigkeit geworden ist.

3.5.1 Strahl als Folge von Wirbelringen

Die Auffassung der Geschwindigkeitsverteilung des runden Freistrahls nach Gleichung (5.2) als *Gaußsche* Glockenkurve ist nur eine von vielen möglichen Kurvenformen, welche die Bedingung „ähnlicher Profile“ der Grenzschichttheorie erfüllen. Die einfachste Kurve wäre das gleichschenklige Dreieck, welches als das Profil eines in sich geschlossenen Wirbelrings mit Wirbelringdurchmesser D gleich Wirbelfandendurchmesser d interpretiert werden kann.

Dieses Profil kann vereinfacht im Schnitt als das Profil zweier einander berührender Festkörperwirbel angesehen werden, welche entgegengesetzten Drehsinn haben und von der Achse in Fließrichtung nach außen drehen. Tatsächlich muss es sich um Potentialwirbel handeln, so dass der Festkörperwirbel nur den Kern darstellt. Weiterhin wird sich keine Spitze in der Geschwindigkeitsverteilung ausbilden, sondern ein stetiger Übergang. Für die Betrachtung nach *Kranawettreiser* (1996) (weiter ausgeführt auch in *Thürmer* (1999) und *Koch* (2009)) ist jedoch die lineare Geschwindigkeitsverteilung (des Festkörperwirbels) am aufschlussreichsten.

Für den Wirbelring (= Turbulenzballen) mit $D = d$ ergibt sich die Beziehung, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit gleich dem 1,829fachen der Umfangsgeschwindigkeit ist. Weil nun die Fortpflanzungsgeschwindigkeit gleich der Maximalgeschwindigkeit in der Strahlachse ist, ergibt sich eine Geschwindigkeitsverteilung mit einem Wert der Umfangsgeschwindigkeit

$$v_u = 0,5467 \cdot v_{\max}$$

sowie der Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$v_f = 1,829 \cdot v_u = 1,829 \cdot 0,5467 \cdot v_{\max} = v_{\max}$$

und dem Maximalwert der Geschwindigkeit

$$2 \cdot v_u = 2 \cdot 0,5467 \cdot v_{\max} = 1,0934 \cdot v_{\max}$$

welche sich sehr gut an die Geschwindigkeitsverteilung nach *Kraatz* anschmiegt. Die scharfen Knicke in der Geschwindigkeitsverteilung können natürlich nicht auftreten und werden sich mit der Laufzeit verschleifen, so dass eine völlige Übereinstimmung mit dem tatsächlich gemessenen Geschwindigkeitsprofil erreicht wird. Für die Berechnung dagegen wird die einfache lineare Geschwindigkeitsverteilung beibehalten.

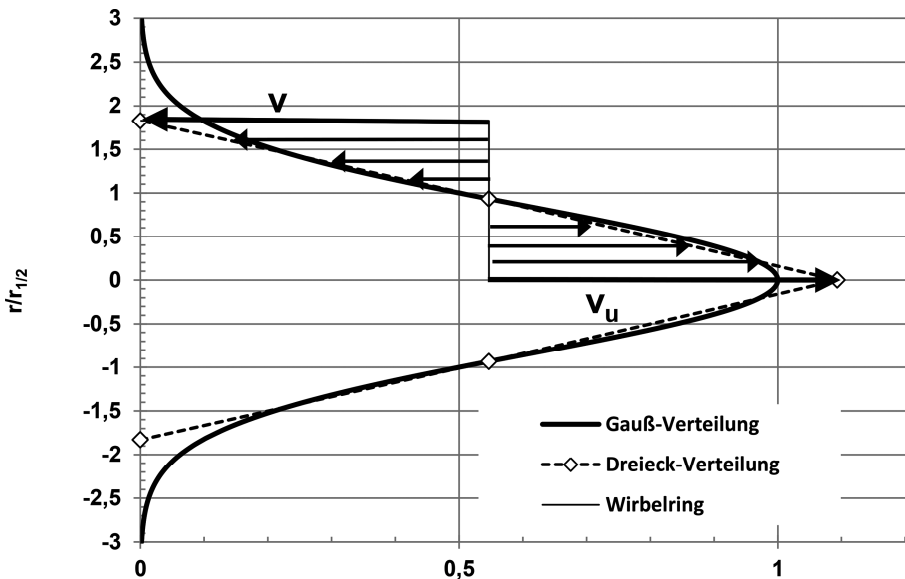


Bild 3.10
Geschwindigkeitsverteilung im Strahl und im Wirbelring

Annahme: Die Geschwindigkeitsverteilung im runden Strahl ist außerhalb der Kernzone linear und nimmt von v_{\max} in Strahlachse bei $r = 0$ auf $v = 0$ bei $r = R$ ab. Aus der Impulskonstanz folgt dann

$$Q \cdot v_0 = \frac{\pi}{6} \cdot v_{\max}^2 \cdot R^2$$

Mit diesem allgemeinen Ansatz, der für jeden beliebigen Querschnitt außerhalb der Kernzone des Strahls den Zusammenhang zwischen Maximalgeschwindigkeit (in Strahlachse) und Abmessung des Strahls (bzw. des Wirbelrings) angibt, kann jetzt die Abmessung des Wirbelrings für den ersten zutreffenden Punkt, also am Ende der Kernzone, berechnet werden.

An diesem Punkt gilt gerade noch $v_{\max} = v_0$, und R kann als Anfangswert R_0 zugeordnet werden:

$$Q \cdot v_0 = \frac{\pi}{6} \cdot v_0^2 \cdot R_0^2 \text{ mit } R_0 = \sqrt{\frac{6}{\pi} \cdot \frac{Q}{v_0}} = \sqrt{\frac{6}{\pi} \cdot \frac{v_0 \cdot D_0^2 \cdot \pi}{4 \cdot v_0}} = D_0 \cdot \sqrt{3/2}$$

Die zugehörige Frequenz des Wirbelrings mit dem Wirbelring-Durchmesser $D = R_0$ und dem Wirbelfaden-Durchmesser $d = R_0$ ergibt sich als Umlauffrequenz des Wirbelfadens zu $f_0 = \frac{v_u}{d \cdot \pi} = \frac{v_u}{R_0 \cdot \pi}$, also mit

$$v_u = 0,5467 \cdot v_{\max} = 0,5467 \cdot v_0 \quad \text{zu} \quad f_0 = \frac{0,5467 \cdot v_0}{D_0 \cdot \sqrt{3/2} \cdot \pi} = 0,142 \cdot v_0 / D_0$$

Der Wirbelring vergrößert in der Halbwertszeit $t^* = \frac{(R/2) \cdot Re_{\min}}{4 \cdot \ln(1,56) \cdot v_u}$ den Anfangsradius R_0 des Wirbelfadens auf das Doppelte und halbiert gleichzeitig die Anfangsumlaufgeschwindigkeit v_u . Mit den Anfangswerten $R_0 = D_0 \sqrt{2/3}$ und $v_{u0} = 0,5467 \cdot v_0$ sowie dem Wert $Re_{\min} = 15$ (Kranawettreiser (1996)) ergibt sich

$$t_0^* = \frac{0,5 \cdot D_0 \cdot \sqrt{3/2} \cdot 15}{4 \cdot \ln(1,56) \cdot 0,5467 \cdot v_0} = 8,433 \cdot (R_0/2) / v_{u0} = 9,446 \cdot D_0 / v_0$$

Mit einer linearen Abnahme der Fortpflanzungsgeschwindigkeit mit der Zeit innerhalb der Halbwertszeit (Fortpflanzungsgeschwindigkeit halbiert sich, weil sich die Umfangsgeschwindigkeit halbiert) ergibt sich eine Lauflänge für den ersten Abschnitt $L_{0-1} = 0,75 \cdot v_0 \cdot t_0^* = 0,75 \cdot v_0 \cdot 9,446 \cdot D_0 / v_0 = 7,0845 \cdot D_0$, welche zu der Kernzonenlänge $x_0 = 6,2 \cdot D_0$ zu addieren ist, um die Gesamtlauflänge bis zum Zustand $n = 1$ zu erhalten.

Die Frequenz an einem Punkt n mit demzufolge n -facher Verdoppelung des Umfangs und gleichzeitig n -facher Halbierung der Umfangsgeschwindigkeit ergibt sich zu

$$f_n = 0,142 \cdot \left(\frac{v_0}{2^n} \right) / \left(D_0 \cdot 2^n \right) = \frac{0,142}{(2^n)^2} \cdot \frac{v_0}{D_0}$$

Sie ist damit – in Übereinstimmung mit Beobachtungen – proportional zu dem Verhältnis von Strahlgeschwindigkeit zu Strahldurchmesser.

Für eine Flüssigkeit mit einer stabilen Dichteschichtung ergibt sich eine konstante Brunt-Vaisälä-Frequenz $N = \sqrt{g/H}$. Wird die Frequenz N mit der Umlauffrequenz des Wirbelrings gleichgesetzt, dann gilt

$$f_n = N = \frac{0,142}{(2^n)^2} \cdot \frac{v_0}{D_0} = \sqrt{g/H}$$

woraus

$$H = 0,611 \cdot g \cdot \left(\frac{(2^n)^2}{0,142} \cdot \frac{D_0}{v_0} \right)^2 = 0,611 \cdot g \cdot \left(\frac{2^{2n}}{0,142} \cdot \frac{D_0}{v_0} \right)^2$$

(unter Einführung der empirischen Konstanten $\pi/(\pi+2)=0,611$) abzuleiten ist. Die Höhe H (über diese Höhe würde die Dichte linear auf null abnehmen) ist nun ausschlaggebend für die Dichteverteilung über die Tiefe z einer Flüssigkeit, wenn z die Tiefenlage unter der Ebene mit der Dichte ρ_0 bedeutet. Daraus folgt $\rho_{(z)} = \rho_0 \cdot e^{z/H}$ was mit dem Trockensubstanzgehalt in der entsprechenden Tiefe $TS_{(z)} = (e^{z/H} - 1) / (1 - 1/\rho_F)$ zusammenhängt (wenn der Trockensubstanzgehalt in der gleichen Einheit gemessen wird wie die Dichte der Flüssigkeit). Die Größe ρ_F ist dabei die Reindichte des Feststoffs, welcher in der Strömung transportiert wird. Über die Kenntnis der Frequenz des Freistrahls nach einer bestimmten Lauflänge kann demnach ermittelt werden, ob die zugegeben Feststoffe weiter transportiert werden können oder ausfallen.

3.5.2 Schichtströmung als Folge von Wirbelringen

Wenn der Strahl gerade die Schicht erreicht hat, in welcher die Umgebungsdichte der Strahldichte entspricht, muss er sich dort einschichten. Infolge der Dichtedifferenzen nach oben und unten erlischt die vertikale Einmischung und der Strahl verliert seinen Strahlcharakter, er geht in eine Schichtströmung über mit konstant bleibendem Durchfluss, ähnlich Bild 3.9. Die Geschwindigkeit muss an der oberen und unteren Grenze der Schicht den Wert null annehmen. Auch in diesem Fall kann die Geschwindigkeitsverteilung als Dreieck angesetzt werden.

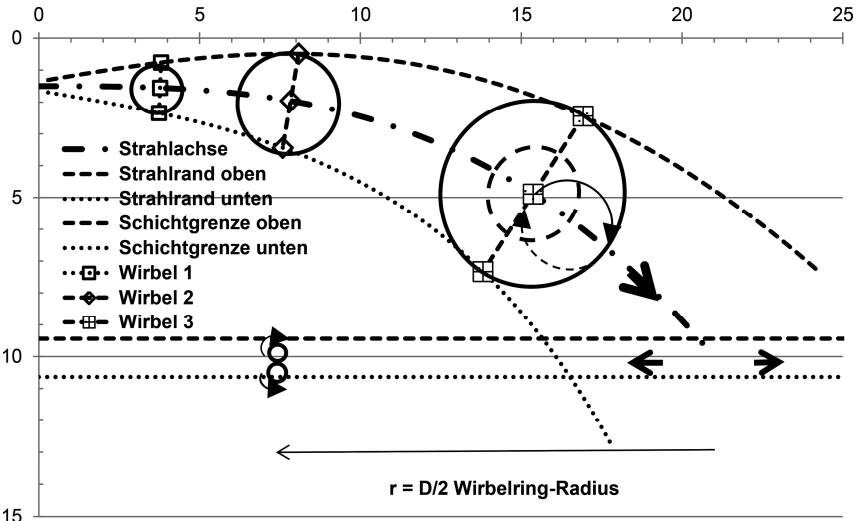
Ausgehend vom Bild des Wirbelrings im Strahl und der Tatsache, dass der Strahl praktisch auf die horizontale Mittelebene der Schicht auftrifft und als radialer ebener Strahl (nicht als Wandstrahl!) umgelenkt wird, lässt sich folgendes Bild entwickeln. Bei der Umlenkung entstehen zwei gegenläufige Wirbelringe. Diese können nicht mehr die Bedingung Wirbelfadendurchmesser = Wirbelringdurchmesser beibehalten, sondern der Wirbelfadendurchmesser d bleibt konstant, während sich der Wirbelringdurchmesser D ständig vergrößert.

In der Schicht bleibt der Durchfluss konstant, weil keine Einmischung mehr erfolgen kann. Die gesamte im Strahl transportierte Wassermenge muss also in der Schicht radial abströmen (ausgehend vom Auftreffpunkt des Strahls auf die Einschichtungs-ebene bzw. den Wasserspiegel bzw. die Gewässersohle). Die Schichtdicke ergibt sich

zu $h = 6,84 \cdot 4 \sqrt{\frac{(Q/(2 \cdot \pi)) \cdot v}{g \cdot (dp/dh) \cdot h}}$ und muss deshalb iterativ bestimmt werden. Die mitt-

lere Geschwindigkeit in der Schicht in der Entfernung r vom Auftreffpunkt des Strahls beträgt $v = Q/(2 \cdot r \cdot \pi \cdot h)$. Die Schichtdicke h ist unabhängig von der Entfernung r .

Zur Berechnung der maximalen Konzentration in der Schicht mit der Höhe h und der mittleren Geschwindigkeit v wird davon ausgegangen, dass die Geschwindigkeit an der oberen und unteren Lamellengrenze zu null wird und in der Mitte ein Maximum


Bild 3.11

Wirbelringe in Strahl und Schicht

mit der Größe $2 \cdot v = v_f = 1,829 \cdot v_u$ (in Abwandlung der Verhältnisse im Freistrah) aufweist. Die gesamte Geschwindigkeitsverteilung kann dann als erzeugt durch die Bewegung zweier gegenläufiger zylindrischer Wirbelfäden mit dem Durchmesser $h/2$ und der Umfangsgeschwindigkeit $v_u = 1,0935 \cdot v$ betrachtet werden. Damit ergibt sich die Umlauf-Frequenz zu $f_U = \frac{v_u}{\pi \cdot h/2} = \frac{1,0935 \cdot v \cdot 2}{\pi \cdot h} = \frac{2,187}{\pi} \cdot \frac{v}{h}$. Diese muss

wieder gleichgesetzt werden mit der *Brunt-Vaisälä*-Frequenz $f_U = N = \sqrt{g/H}$ woraus die fiktive Höhe $H = g \cdot 1,505 \cdot h^2 / v^2$ folgt.

Falls der Strahl auf die Wasseroberfläche oder die Sohle trifft, kann mittels der Berechnung des umgelenkten radial-ebenen Freistrahls ermittelt werden, von welcher Entfernung vom Auftreffpunkt an die vertikale Vermischung aufhört, weil $Ri > 1/24$ erreicht wird.

Beispiel 3.5

Aus dem Sediment eines Tagebaurestsees soll dort eingespülte Braunkohlenfilterasche zur Neutralisierung des Seewassers aufgenommen und im See verteilt werden. Dazu wird ein Saugbagger verwendet, welcher einen Förderstrom Q_0 von $1600 \text{ m}^3/\text{h}$ bei einem Strahldurchmesser $D_0 = 0,29 \text{ m}$ erzeugt. Die Reindichte der Braunkohlenfilterasche kann mit $\rho_F = 2,65 \text{ t/m}^3$ angesetzt werden. Im See existiert ein völlig vermischtes Epilimnion mit einer Temperatur von 16°C entsprechend $\rho = 0,99894 \text{ t/m}^3$ bis zu einer Tiefe von 4 m („Grenze“). Darunter liegt das Metalimnion mit einem Dichtegradienten von $1,666 \cdot 10^{-4} \text{ kg/(l} \cdot \text{m)}$. Die Feststoffkonzentration im Strahl wird auf $34,4 \text{ kg/l}$ eingestellt. Es ist zu berechnen, in welcher Tiefe

sich der Strahl einschichtet, welche Konzentration dort noch vorhanden ist, und ob der Feststoff im Strahl transportiert werden kann oder ob er ausfällt.
Zur Berechnung werden die vorstehenden Beziehungen tabellarisch ausgewertet.

Vorgaben

Strahldurchmesser D_o Saugbagger	0,29	[m]	
Strahlgeschwindigkeit v_o	6,737	[m/s]	
Strahldichte q_o	1,02037	[kg/l]	
Einleitungstiefe t_E	1,5	[m]	4 [m] Grenze
Strahl-Durchfluss Q_o 1600 m ³ /h	0,445	[m ³ /s]	
Dichte $q = q(t = 0)$ (real an Oberfläche)	0,99894	[kg/l]	0,99894 Dichte an Grenze
Dichtegradient für $t < 4$ m	0	[kg/(l*m)]	
Dichte $q = q(t = 0)$ (fiktiv an Oberfläche)	0,9982736	[kg/l]	0,99894 Dichte an Grenze
Dichtegradient für $t > 4$ m	0,0001666	[kg/(l*m)]	(muss gleich sein wie oben!)
Umgebungsichte $q_A = q(t_E)$	0,99894	[kg/l]	an Einleitungsstelle
Froudezahl Fr_D	27,56		
Anfangskonzentration	34,4	[kg/m ³]	

Ergebnisse

Einschichtungstiefe	10,04	m
(Strahldichte = Umgebungsichte!)		
Gesamtdurchfluss $Q(L)$	11,63	m ³ /s
Konzentration	1,32	[kg/m ³]
Dichte Einschichtung	0,9999451	[kg/m ³]
Schichtdicke h	1,199	[m]

Die Ermittlung der Wirbelabmessungen, Frequenzen usw. im Strahl erfolgt zunächst dimensionslos und wird dann auf das Beispiel angewendet:

Dimensionslose Darstellung der Größen im runden Freistrah (Geschwindigkeitsverteilung: Dreieck, Strahl als Folge von Wirbelringen)

n	0	1	2	3	4
x/D_o	6,2	13,3	27,5	55,8	112,5
R/D_o	1,22	2,45	4,90	9,80	19,60
v_u/v_o	0,546700	0,273350	0,136675	0,068338	0,034169
v_{max}/v_o	0,999914	0,499957	0,249979	0,124989	0,062495
$Str = f^* D_o / V_o$	0,142087	0,035522	0,008880	0,002220	0,000555
v_f/v_o	0,999914	0,499957	0,249979	0,124989	0,062495
$(t^*) * v_o / D_o$	9,45	37,78	151,14	604,55	2418,18
$\Delta L / D_o$	7,08	14,17	28,34	56,67	113,34
$x/D_o + \Delta L / D_o$	13,2839	27,5	55,8	112,5	225,8
Q/Q_o	1,984	4,251	8,785	17,852	35,987

Saugbagger		D_o [m] =	0,29	Q_F [t/m³] =	2,65	
		v_o [m/s] =	6,73	c_o [kg/m³] =	34,4	
		Q_o [m³/h] =	1600			
n		0	1	2	3	4
x/D _o		6,2	13,28	27,45	55,79	112,46
x	[m]	1,798	3,852	7,961	16,178	32,613
v _{max}	[m/s]	6,7281	3,3641	1,6820	0,8410	0,4205
v _u	[m/s]	3,6786	1,8393	0,9196	0,4598	0,2299
ΔL	[m]	2,054	4,109	8,217	16,435	32,869
x + ΔL	[m]	3,852	7,961	16,178	32,613	65,482
R	[m]	0,355	0,710	1,421	2,841	5,683
f	[1/s]	3,29676	0,82419	0,20605	0,05151	0,01288
t*	[s]	0,41	1,63	6,51	26,06	104,22
H	[m]	0,55	8,82	141,18	2258,89	36142,30
z	[m]	1,51	1,57	1,96	4,88	10,04
TS	[mg/l]	23218476	312763	22452	3473	446
Trockensubstanzgehalt im Wirbel						
Q	[m³/h]	3174	6801	14055	28563	57579
Konzentration im Strahl aus Anfangskonzentration						
TS	[mg/l]	17338,71	8092,49	3915,96	1926,96	955,91

Es ist zu erkennen, dass im Wirbel $n = 3$ der maximal mögliche Trockensubstanzgehalt mit 3473 mg/l noch über der Konzentration im Strahl mit 1927 mg/l liegt. Bei der weiteren Vergrößerung des Wirbels (mit Verringerung der Umfangsgeschwindigkeit) müsste der Feststoff teilweise ausfallen. Wegen der Einschichtung nimmt aber die Geschwindigkeit nicht weiter ab.
Die Berechnungsergebnisse für Strahlachse, Strahlgrenzen, Wirbelanordnung usw. sind auch in Bild 3.11 dargestellt.

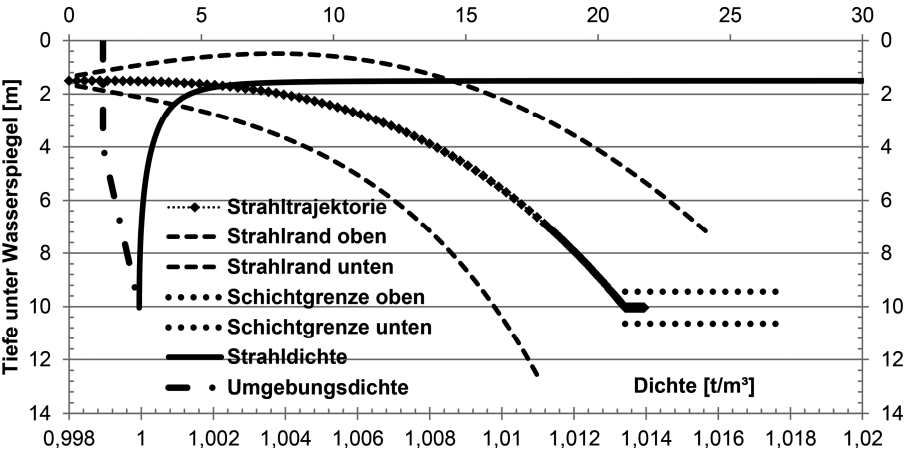


Bild 3.12
Dichteverlauf im Strahl mit der Tiefe und Strahlabmessungen

Die Berechnung für die Schicht ergibt einen maximal möglichen Trockensubstanzgehalt, welcher mit rund 600 g/l weit über dem Wert von 1,32 g/l am Ende des Strahls liegt. Bei der horizontalen Ausbreitung des zugegebenen Stoffes wird es auch bei sehr großen Abmessungen des Sees nicht zu einem Ausfallen des Feststoffes kommen.

Schicht

z = t	[m]	10,04	Tiefe der Einschichtung				
Q	[m ³ /s]	11,625	Enddurchfluss im Strahl bei Einschichtung				
h	[m]	1,1989	Schichtdicke				
x	[m]	21,025	horizontale Koordinate des Strahls bei Einschichtung				
L	[m]	23,676	Lauflänge des Strahl bei Einschichtung				
r	[m]	4,21	Strahlradius bei Einschichtung				
c	[mg/l]	1319	Endkonzentration im Strahl bei Einschichtung				
Q _F	[t/m ³]	2,65					
r	[m]	1,5	2	3	5	15	
x rechts	[m]	22,525	23,025	24,025	26,025	36,025	
x links	[m]	19,525	19,025	18,025	16,025	6,025	
v	[m/s]	1,029	0,772	0,514	0,309	0,103	
H	[m]	20,05	35,64	80,20	222,77	2004,90	
TS	[mg/l]	974877	783071	669635	618075	593803	
maximal möglicher Trockensubstanzgehalt in der Schicht							

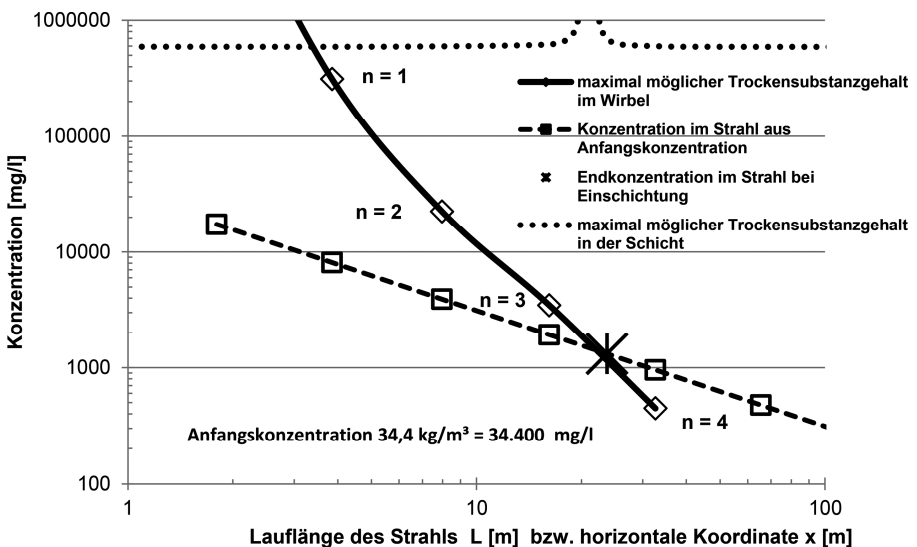


Bild 3.13

Konzentration im Strahl und maximal mögliche Konzentration im Wirbel

3.6 Symbolverzeichnis

Symbol	Bedeutung	Einheit
a	Höhe der Entnahmeöffnung	m
b	Schichthöhe in der Entfernung x	m
Fr_{Δ}	reduzierte <i>Froudezahl</i>	–
g^*	„reduzierte“ Erdbeschleunigung	$m \cdot s^{-2}$
h	Schichthöhe, Fließtiefe	m
$h_{2,kr}$	kritische Tiefe der unteren, fließenden Schicht	m
I	Impulsstrom	N
Ke	Kriterium nach <i>Keulegan</i>	–
Ri	<i>Richardsonzahl</i>	–
Ri_0	globale <i>Richardsonzahl</i>	–
v	Geschwindigkeit	$m \cdot s^{-1}$
λ_t	Beiwert der internen Reibung	–
$\tau_{1,12}$	Schubspannung an der Schichtgrenze	Pa
τ_0	Sohlschubspannung	Pa
$\Delta\rho$	Dichtedifferenz	–
$dp/dh; \Delta\rho/h$	Dichtegradient	$kg \cdot m^{-3} \cdot m^{-1}$

Indizes

0	Normalabfluss	E	Entnahme
1	Oberschicht	i	intern
2	Unterschicht	kr	kritisch
A	Absenkung	T	Tauchpunkt

3.7 Literaturverzeichnis

Abraham, G. B.; Vreugdenhil, V. (1971): Discontinuities in Stratified Flow. Journal of Hydraulic Research, vol. 9, Nr. 3.

Abraham, G.; Eysink, V. (1971): Magnitude of Interfacial Shear in Exchange Flow. Journal of Hydraulic Research, vol. 9, Nr. 3.

Averkiev, A.; Kind (1965): Études expérimentales des certaines caracteristiques des courants de densité. Leningrad: XI. IAHR-Kongress, Nr. 2.23.

Averkiev, A.; Makarov, I. I.; Kind (1971): Heat Transfer in a Cooling Pond. Paris: XIV. IAHR-Kongress, Bd. 1.

Bata, G. L. (1957): Recirculation of Cooling Water in Rivers and Canals. Proceedings ASCE, vol. 83, Journal of the Hydraulics Division, HY 3.

Bata, G. L. (1959): Frictional Resistance at the Interface of Density Currents. Montreal: VIII. IAHR-Kongress, C 12.

Bollrich, G. (2013): Technische Hydromechanik 1 (7., überarbeitete Auflage). Beuth Verlag GmbH, Berlin.

Bolschakow, W. A. (1977): Spravocnik po gidravlike. Kiew.

Brooks, K. (1969): Selective Withdrawal from Density-stratified Reservoirs. Proceedings ASCE, vol. 95, Journal of the Hydraulics Division, HY 4, S. 1369 ff.

Bührer, H.; Ambühl, H. (1975): Die Einleitung von gereinigtem Abwasser in Seen. Hydrologie 37/2.

- Debler, V.* (1959): Stratified Flow into a Line Sink. Proceedings ASCE, vol. 85, Journal of the Engineering Mechanics Division, EM 3, S. 51 ff.
- Faure, J.* (1961): Conditions similitude pour l'étude des circuits de refroidissements de l'eau des centrales Thermiques. La Houille Blanche, Nr. Special A.
- Gelhar, L.; Mascolo, M.* (1966): Non-Diffusive Characteristics of Slow Viscous Motion Towards a Line Sink, M.I.T. Hydrodynamics Laboratory, Report Nr. 88.
- Harleman, D. R.; Morgan, H.; Purple, H.* (1959): Selective Withdrawal from a Vertically Stratified Fluid. Montreal: VIII. IAHR-Kongress, C 10.
- Hinwood, J. B.* (1970): Bis zum Jahre 1945 durchgeführte Untersuchungen über geschichtete Dichteströmungen. La Houille Blanche, Nr. 4.
- Hutter, K.; Trösch, J.* (1975): Über die hydrodynamischen und thermodynamischen Grundlagen der Seezirkulation. Mitt. VAW Nr. 20.
- Jia-hua, F.* (1960): Experimental Studies on Density Currents. Scientia Sinica, vol. 9, Nr. 2.
- Keulegan, G.* (1949): Interfacial Instability and Mixing in Stratified Flows. U.S. National Bureau of Standards, Journal of Research, vol. 43.
- Koch, C.* (2009): Einsatz von alkalischen Materialien und CO₂ zur Neutralisierung bergbaubedingt versauerter oberirdischer Gewässer und nachfolgende CO₂-Mineralisierung. Cottbus: BTU, Diss.
- Kranawettreiser, J.* (1973): Probleme der Dichteschichtung. Dresden: TU, Diss.
- Kranawettreiser, J.* (1974): Erarbeitung hydromechanischer Grundlagen für die Tiefenwasserableitung aus dem Arendsee. Dresden: TU, Sektion Wasserwesen, unveröffentlicht.
- Kranawettreiser, J.* (1996): Strahlinduzierte Wirbelsysteme als Mittel zur Förderung des Stofftransports. BMBF-Statusseminar „Stehende Gewässer“. Dresden.
- Lepetit, R.* (1970): Étude bibliographique du coin salé. EDF-Bulletin de la direction des études et recherches, série A, Nr. 4.
- Otsubo, F.* (1959): Density Currents in a River with Small Tidal Range. Montreal: VIII. IAHR-Kongress, C 4.
- Poggi, B.* (1959): Sul moto delle correnti stratificate. L'Energia Elettrica, Nr. 3.
- Prandtl, L.* (1961): Einfluß stabilisierender Kräfte auf die Turbulenz. In Gesammelte Abhandlungen, Bd. 2. Berlin.
- Riddel, J. F.* (1967): Dichteströmungen in einem Kanal mit rechteckigem Querschnitt. La Houille Blanche, Nr. 4.
- Sawamoto; Shi-Igai* (1969): Experimental and Theoretical Modelling of Saline Wedge. Kyoto: XIII. IAHR-Kongress, C 4.
- Singh, P.; Shah, T.* (1971): Plunging Phenomenon of Density Currents in Reservoirs. La Houille Blanche, Nr. 1.
- Thürmer, K.* (1999): Ausbreitungsmechanismen von Suspensionen zur Restaurierung stehender Gewässer am Beispiel des Schmalen Luzin. Weimar: Bauhaus-Universität, Diss.
- Widomski, A.* (1970): Bedingungen für das Auftreten einer Rezirkulation bei Kühlwasserentnahme aus einem Fluss. Gospodarka wodna, Nr. 1.